

Vorlesungsskriptum
Wintersemester 2004/05

SATELLITENGEODÄSIE 2

Markus Rothacher

Institut für Astronomische und Physikalische
Geodäsie

Technische Universität München

München, Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung, Programm und Literatur	5
1.1 Einführung	5
1.1.1 Definitionen	5
1.1.2 Die Rolle der Erdatmosphäre	6
1.1.3 Optische Ära	7
1.1.4 Doppler Ära	8
1.1.5 Laserdistanzmessungen zu Satelliten und zum Mond (SLR und LLR)	8
1.1.6 Very Long Baseline Interferometry (VLBI)	9
1.1.7 Das Global Positioning System (GPS)	10
1.1.8 Andere Satelliten-Mikrowellenverfahren	13
1.1.9 Satellitenmissionen	13
1.1.10 Wichtige Organisationen	15
2. Die geodätischen Raumverfahren	17
2.1 Very Long Baseline Interferometry (VLBI)	19
2.1.1 Einführung	19
2.1.2 Das Grundprinzip der VLBI	20
2.1.3 Radioquellen	22
2.1.4 Instrumentierung und Signalverarbeitung	23
2.1.5 Korrelator und Beobachtungsgrößen	24
2.1.6 Die geometrische Laufzeitdifferenz	25
2.1.7 Laufzeitdifferenz im baryzentrischen Koordinatensystem	27
2.1.8 Aberration	28
2.1.9 Relativistische Effekte	28
2.1.10 Instrumentelle Einflüsse	30
2.2 GPS und GLONASS	31
2.2.1 Systembeschreibung	31
2.2.2 Signalstruktur	35
2.2.3 GPS-Zeit	38
2.2.4 Beobachtungsgleichungen	40
2.2.5 Relativistische Korrekturen	45
2.2.6 Differenzenbildung und Linearkombinationen	46
2.2.7 Instrumentelle Einflüsse	48
2.3 Satellite und Lunar Laser Ranging (SLR und LLR)	51
2.3.1 Grundprinzip der SLR/LLR-Messung	51
2.3.2 SLR-Satelliten	52
2.3.3 SLR-Systemkomponenten	52
2.3.4 Beobachtungsgleichung	53
2.3.5 Instrumentelle Einflüsse	55
2.3.6 Preprocessing und Normalpoints	55
2.3.7 Lunar Laser Ranging (LLR)	55

2.4	Satellitenaltimetrie	59
2.4.1	Grundprinzip der Satellitenaltimetrie	59
2.4.2	Altimetermissionen	60
2.4.3	Beobachtungsgleichung	61
2.4.4	Instrumentelle Einflüsse	62
2.4.5	Fehlerbudget	62
2.4.6	Bestimmung der mittleren Meeresoberfläche, des Geoids und des Schwerefelds	63
3.	Stationskoordinaten und Stationsbewegungen	66
3.1	Modellierung der Stationsbewegungen	66
3.1.1	Plattentektonik	67
3.1.2	Feste Erdgezeiten	68
3.1.3	Polgezeiten	73
3.1.4	Auflasteffekte der Ozeane	74
3.1.5	Auflasteffekte der Atmosphäre	76
3.1.6	Regionale und lokale Deformationen	76
3.2	Bestimmung von Stationskoordinaten	76
3.2.1	Partielle Ableitungen der Beobachtungen nach den Stationsko- ordinaten	78
3.2.2	Datumsdefinition und Systembedingungen	79
4.	Signalausbreitung in der Atmosphäre	82
4.1	Grundlagen der Wellenausbreitung	82
4.1.1	Mathematische Beschreibung	82
4.1.2	Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	84
4.1.3	Spektrum der elektromagnetischen Wellen	85
4.2	Aufbau der Atmosphäre	86
4.3	Ionosphärische Refraktion	89
4.3.1	Modellierung der ionosphärischen Refraktion	90
4.3.2	Bestimmung von Ionosphärenmodellen	93
4.4	Troposphärische Refraktion	93
4.4.1	Troposphärische Refraktion für Radiowellen	95
4.4.2	Troposphärische Refraktion im optischen Bereich	98
4.4.3	Das Schätzen von Troposphärenparametern	100
5.	Satellitenbahnen	103
5.1	Bewegungsgleichung der ungestörten Bahn	103
5.2	Bewegungsgleichung der gestörten Satellitenbahn	104
5.3	Mittlere und oskulierende Bahnelemente	106
5.4	Störungsrechnung	112
5.4.1	Spezielle Störungsrechnung	112
5.4.2	Allgemeine Störungsrechnung	114
5.4.3	Störungsrechnung erster Ordnung	117

5.4.4	Beispiel: Einfluss der Abplattung der Erde auf die Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens Ω	118
5.5	Bahnbestimmung	120
5.5.1	Problemstellung	120
5.5.2	Prinzip der Bahnbestimmung	121
5.5.3	Partielle Ableitungen nach den Keplerschen Elementen	123
5.5.4	Partielle Ableitungen nach den dynamischen Parametern . . .	124
5.5.5	Die Theorie von Kaula	126
	Literatur	130

1. Einführung, Programm und Literatur

1.1 Einführung

1.1.1 Definitionen

Nach der klassischen Definition von *Helmert* [1880] ist die *Geodäsie* die *Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erde* einschliesslich der *Bestimmung des Schwerefeldes der Erde*. In der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts wurde die Geodäsie durch den Einsatz von künstlichen Erdsatelliten revolutioniert. Es wurde deshalb sehr bald der Begriff *Satellitengeodäsie* eingeführt. Unter der Satellitengeodäsie verstehen wir jene Aspekte der Geodäsie, die mit Hilfe von Messungen von, zu oder zwischen künstlichen Erdsatelliten studiert und erforscht werden können [Seeber, 1989].

Der Begriff *Satellitengeodäsie* (engl. *Satellite Geodesy*) ist enger gefasst als der englische Ausdruck *Space Geodesy* oder die französische Bezeichnung *Géodésie Spatiale*. Die *Space Geodesy* umfasst neben der Satellitengeodäsie, also den Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten, auch die Beobachtungen zu natürlichen Himmelskörpern wie dem Mond und den Planeten und sogar zu Objekten ausserhalb unseres Sonnensystems. Dazu gehört insbesondere der Empfang von Radiosignalen extrem weit entfernter Quasare in der Radiointerferometrie. Im deutschen Sprachgebrauch gibt es kein exaktes Gegenstück zum englischen Begriff *Space Geodesy*. Mögliche Bezeichnungen sind *Geodätische Weltraumverfahren*, *Geodätische Raumverfahren* oder auch *Globale Geodäsie*.

In dieser Vorlesung wollen wir uns mit der allgemeineren *Space Geodesy* befassen, werden aber einfachheitshalber oft den Begriff Satellitengeodäsie verwenden. Die folgenden historischen und einführenden Abschnitte wurden teilweise einem englischen Übersichtsartikel entnommen [Beutler, 1999], der in Bälde in einer astronomischen Enzyklopädie erscheinen wird.

Den eigentlichen Beginn des Weltraumzeitalters markiert der Start des ersten künstlichen Satelliten, Sputnik I, am 4. Oktober 1957. Von dieser Zeit an war es möglich, künstliche Satelliten in eine Umlaufbahn zu bringen und sie zu benutzen, um die Gestalt der Erde *vom Weltraum aus* zu erforschen oder sie als Ziele für Beobachtungen *von der Erdoberfläche aus* zu verwenden. Der zweite wichtige Schritt bestand in der Entwicklung der *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI). Diese Technik, bei der extragalaktische Radioquellen (Quasare) beobachtet werden, wurde zu einem einmaligen Instrument für die Realisierung eines sehr genauen und stabilen raumfesten Referenzsystems (Inertialsystem) und zur Erfassung der Rotation der Erde.

Heute sind die geodätischen Raumverfahren die primären Hilfsmittel, um die dauernden Deformationsprozessen unterliegende Erde in ihrer Form und Grösse zu vermessen und ihre Bewegung als Körper im Raum zu beschreiben. Die geodätischen Raumverfahren bilden damit eine unabdingbare Grundlage für die Geodäsie, die geodätische Astronomie und die Geodynamik. Sie liefern Information über die Position und Bewegung sowohl des beobachteten Objektes als auch des Beobachters und damit auch über die Transformation zwischen dem erdfesten und dem raumfesten Bezugsrah-

men. Diese Transformation wird durch die Erdrotationsparameter (Polschwankung, UT1, Präzession und Nutation) definiert.

1.1.2 Die Rolle der Erdatmosphäre

Die von den geodätischen Raumverfahren verwendeten Signale der beobachteten oder beobachtenden Himmelsobjekte müssen die Erdatmosphäre durchlaufen. Durch die Interaktion der Signale mit den Teilchen der Erdatmosphäre wird sowohl der Weg als auch die Laufzeit der Signale verändert. Diese Effekte nennt man *Refraktion*. Die Refraktion der Signale wird in der Astronomie, Geodäsie und Geodynamik gewöhnlich als Störfaktor empfunden. In den letzten Jahren werden die Auswirkungen der Refraktion jedoch mehr und mehr als eine wichtige Informationsquelle verstanden, die es den geodätischen Raumverfahren ermöglicht, den Zustand der Atmosphäre und die darin ablaufenden Prozesse zu verfolgen. So werden heute dieselben geodätischen Beobachtungen sowohl für geodätische und geodynamische Untersuchungen als auch für die Erforschung der Erdatmosphäre verwendet. Interdisziplinäre Projekte und Studien sind damit zu einem wichtigen Bestandteil der modernen Space Geodesy geworden.

Ob der Einfluss der Atmosphäre auf die Signale interessante Informationen über die Atmosphäre enthält, hängt von der Frequenz der Signale ab. Wenn wir beispielsweise Distanzen oder Distanzdifferenzen zu Satelliten mit Signalen im optischen Bereich des elektromagnetischen Spektrums messen, so können die Refraktionseffekte mit Hilfe von Messungen des Drucks, der Temperatur und der relativen Feuchtigkeit auf der Beobachtungsstation mit einer Genauigkeit deutlich unter dem Zentimeter modelliert werden. Wir können daraus schliessen, dass z.B. das Satellite Laser Ranging (SLR) nicht viel zur Erfassung der Atmosphäre beitragen kann, oder positiv formuliert, dass Laser-Beobachtungen sehr gut geeignet sind für die Kalibrierung anderer Techniken, die viel stärker unter den atmosphärischen Einflüssen "leiden".

Bei den Beobachtungsverfahren mit Mikrowellen (Doppler, GPS, VLBI) unterscheiden wir zwischen der *ionosphärischen Refraktion* aufgrund des ionisierten oberen Teils der Atmosphäre (ca. 50–1000 km) und der *troposphärischen Refraktion*, die durch die unteren neutralen Schichten der Atmosphäre (ca. 0–10 km) bewirkt wird. Die ionosphärische Refraktion ist frequenzabhängig und kann (fast) vollständig eliminiert werden, wenn kohärente Signale auf Trägerwellen mit verschiedenen Wellenlängen durch die Atmosphäre gesendet werden. Bei VLBI wird dies durch die Beobachtung der Quasare auf verschiedenen Wellenlängen erreicht, bei GPS oder bei Dopplermessungen dadurch, dass Signale mit zwei unterschiedlichen Frequenzen ausgesandt werden.

Bei Mikrowellenverfahren wird die letztlich erreichbare Genauigkeit durch die troposphärische Refraktion begrenzt. Im Gegensatz zu optischen Messungen müssen wir den Einfluss des sogenannten *feuchten Anteils* der troposphärischen Refraktion berücksichtigen, der zeitlich und örtlich sehr stark variieren kann. Dieser Umstand zwingt die Auswerter von Mikrowellenbeobachtungen, stations-spezifische und zeitabhängige (oder stochastische) Parameter aufzusetzen. Andererseits wird dadurch die Bestimmung des Wasserdampfgehaltes oberhalb einer Station mit hoher Genauigkeit

und hoher zeitlicher Auflösung möglich [Bevis et al., 1992].

1.1.3 Optische Ära

Während Jahrhunderten waren optische (astrometrische) Beobachtungen die einzigen in der Astronomie verfügbaren Messungen. Vor dem Weltraumzeitalter stand eine Vielzahl von astronomischen Instrumenten zur Verfügung, um ein erdfestes Referenzsystem zu definieren und die Erdrotation zu studieren. Die photographische Zenitkamera und das Danjon Astrolabium waren wohl die fortschrittlichsten Instrumente dieser Zeit. Sie wurden insbesondere von den Observatorien verwendet, die Beiträge lieferten zum International Polar Motion Service (IPMS) und zum Bureau International de l'Heure (BIH), um die geographische Breite einer Station in einer Nacht auf etwa 10–40 Millibogensekunden (mas: milliarcseconds) genau zu bestimmen. Mehr Information findet man in [Moritz and Mueller, 1987].

Bereits von den künstlichen Erdsatelliten der ersten Generation wie Sputnik 2 und Explorer 1 wurden optische Beobachtungen gemacht. Die Ballonsatelliten Echo 1 und 2 sowie PAGEOS (Passive Geodetic Satellite), die sogar mit bloßem Auge gesehen werden konnten, wurden von einem weltweiten optischen Stationsnetz verfolgt. Diese Satelliten waren kugelförmig, und ihre Spuren konnten wegen ihrer Helligkeit problemlos gegenüber dem Sternenhintergrund photographiert werden. Es war jedoch nicht einfach, den einzelnen Punkten der Satellitenspur Zeitmarken zuzuordnen. Wesentlich besser geeignet waren in dieser Hinsicht kleinere Satelliten wie Geos 1 (Explorer 29) und Geos 2 (Explorer 36), die mit Blitzlampen ausgerüstet waren. Auch wenn es schwieriger war, diese kleineren Satelliten zu verfolgen, so wurden doch Zehntausende von hochgenauen optischen Messungen realisiert.

Faszinierende Erfolge waren das Resultat dieser ersten Phase der Satellitengeodäsie. Das geodätische Datum auf verschiedenen Kontinenten konnte gegenüber dem Erdmittelpunkt bestimmt und so zwischen den Kontinenten auf etwa 5 m genau angeglichen werden. Auch erste zuverlässige Werte für die Koeffizienten des Gravitationsfeldes der Erde (Kugelfunktionsentwicklung bis Grad und Ordnung 12–15) konnten berechnet werden.

Die astrometrische Messtechnik hatte bei künstlichen Satelliten in den 60er und 70er Jahren schlechte Karten, weil die Sternkataloge nicht von genügender Qualität waren und die Verarbeitungszeit (zwischen Beobachtung und Verfügbarkeit der Resultate) im besten Falle ein paar Wochen betrug. Diese Tatsache und die Entwicklung neuer Beobachtungstechniken mit einem grösseren Genauigkeitspotential machte astrometrische Beobachtungen für viele Anwendungen unattraktiv. Die optischen Beobachtungen spielten in der Satellitengeodäsie nach 1975 keine wesentliche Rolle mehr.

In Anbetracht der in letzter Zeit neu entwickelten Beobachtungsmethoden (Charge-Coupled Device (CCD) Techniques) und der nun verfügbaren, durch die astrometrischen Satellitenmissionen (z.B. Hipparcos) stark verbesserten Sternkataloge könnte es durchaus sein, dass optische Beobachtungen in Zukunft in der Satellitengeodäsie wieder an Bedeutung gewinnen.

1.1.4 Doppler Ära

Das U.S. Naval Navigation Satellite System (NNSS), auch unter dem Namen TRANSIT bekannt, hatte einen bedeutenden Einfluss auf die Entwicklung der Satellitengeodäsie. Es bewies, dass ein Messsystem, das auf der Dopplerverschiebung eines Signals beruhte (erzeugt von einem stabilen Oszillator auf einem Satelliten in Erdumlaufbahn), für die relative Positionierung mit einer erstaunlich hohen Genauigkeit (10–50 cm relative, etwa 1 m absolute Positionierungsgenauigkeit) benutzt werden konnte. Die Satelliten sendeten ihre Signale auf zwei Trägerfrequenzen (400 MHz und 150 MHz) in der Nähe des Mikrowellenbandes.

Die zwei Frequenzen ermöglichten die Eliminierung der ionosphärischen Refraktion. Die eher kleinen Empfänger verbunden mit richtungsunabhängigen Antennen waren sehr gut geeignet, um regionale oder sogar globale geodätische Netze zu etablieren. Beobachtungssessionen von ein paar Tagen waren notwendig, um die oben erwähnte Punktgenauigkeit zu erreichen.

Die NNSS-Satelliten befanden sich in polaren, beinahe kreisförmigen Bahnen ungefähr 1100 km über der Erdoberfläche. Von einem Empfänger konnte jeweils nur das Signal eines einzelnen Satelliten empfangen werden. Im Gegensatz zur Astrometrie war diese Beobachtungstechnik jedoch wetterunabhängig. Bis ein Grossteil der GPS-Satelliten um 1990 herum in Umlauf war, spielte das NNSS eine bedeutende Rolle in der Satellitengeodäsie. Viele Doppler-Kampagnen wurden durchgeführt, um lokale, regionale und globale Stationsnetze zu vermessen. Mit der Vollendung der GPS-Konstellation in den 90er Jahren verloren die Geodäten das Interesse an diesem Dopplersystem. Das TRANSIT-System wurde als Positionierungssystem 1996 abgeschaltet, wurde aber als Instrument für die Überwachung der Ionosphäre weiterverwendet. Mehr Details zum Dopplersystem NNSS findet man in [Kouba, 1983].

1.1.5 Laserdistanzmessungen zu Satelliten und zum Mond (SLR und LLR)

Mit der Laser-Technik (Laser: *Light Amplification through Stimulated Emission of Radiation*), die in den 50er Jahren entwickelt wurde, können kurze Lichtpulse (von ein paar Picosekunden Dauer; $1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$) mit sehr grossen Energien erzeugt werden. Diese Pulse werden von einem astronomischen Teleskop ausgesandt, laufen zum Satelliten (oder zum Mond), werden dort von speziellen Retroreflektoren zum Teleskop zurückreflektiert, wo sie schliesslich detektiert werden. Die eigentliche Beobachtung besteht in der Messung der Lichtlaufzeit Δt des Laserpulses vom Teleskop zum Satelliten und wieder zurück. Abgesehen von Refraktionseffekten ist diese Lichtlaufzeit, multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum, gleich der doppelten Distanz zwischen Satellit und Teleskop zum Zeitpunkt der Reflektion des Pulses am Satelliten. Die heutige *Satellite Laser Ranging* (SLR) Technik wird dazu verwendet, die "wahre" Distanz zwischen Beobachtungsstationen und Satelliten mit einer Genauigkeit von ein paar Millimetern und, falls erforderlich, mit einer hohen Wiederholungsrate (mehrmals pro Sekunde) zu bestimmen.

Die SLR-Technik kann auf alle Satelliten angewandt werden, die Retroreflektoren tragen. Lageos II (siehe Abbildung 1.1), ein typischer Satellit für SLR-Beobachtungen,

wurde 1992 in eine Erdumlaufbahn gebracht. Er ist kugelförmig, hat einen Durchmesser von 60 cm und ein Gewicht von 405 kg. 426 Retroreflektoren sind in seine Oberfläche eingelassen. Lageos II ist ein naher Verwandter von Lageos I, der bereits 1976 gestartet wurde. Beide Satelliten befinden sich in stabilen, beinahe kreisförmigen Bahnen etwa 6000 km über der Erdoberfläche.

Die zwei Lageos-Satelliten sind die primären wissenschaftlichen Ziele für den *International Laser Ranging Service* (ILRS). Ihre Beobachtung hat wesentlich zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde beigetragen. Viele weitere Satelliten werden regelmäßig von den ILRS-Stationen angemessen. Einige davon, wie beispielsweise der tieffliegende französische Satellit *Starlette* mit einem Durchmesser von 24 cm, sind vom Design her den Lageos-Satelliten sehr ähnlich und dienen gleichen Zielsetzungen. Für andere Objekte ist SLR nur eine Technik für die Bestimmung genauer Bahnen.

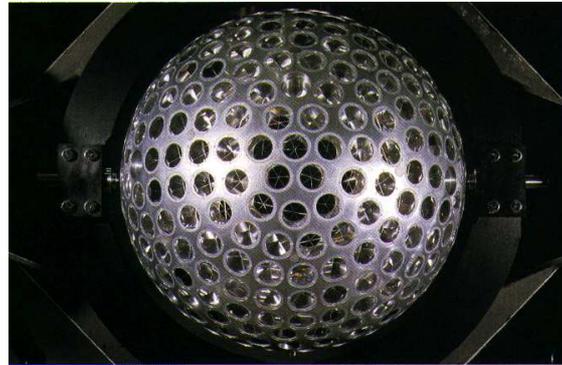


Abb. 1.1: Der SLR-Satellit Lageos II.

Mit Ausnahme von UT1 können aus SLR-Beobachtungen sämtliche für die Geodäsie relevanten Parameter geschätzt werden (Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten, Erdrotationsparameter, Gravitationsfeld). Die einmaligen und wertvollsten Beiträge des SLR bestehen in der Bestimmung des (variablen) Gravitationsfeldes der Erde, der Bewegung des Massenschwerpunktes der Erde (d.h. die Lage des Polyeders, das durch die SLR-Stationen gebildet wird, gegenüber dem Erdmittelpunkt) und der Kalibrierung der geodätischen Mikrowellenverfahren.

Von der technischen Seite her gesehen, gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen dem SLR und dem *Lunar Laser Ranging* (LLR). Es werden Lichtlaufzeiten gemessen von der Station zu einem der Reflektoren auf dem Mond, die während einer der Apollo-Missionen oder der unbemannten Lunokhod-Missionen der Russen auf dem Mond aufgestellt wurden. Der wissenschaftliche Nutzen des LLR ist bedeutsam. Mit LLR war es zum Beispiel möglich, direkt die säkulare Zunahme der Distanz Erde–Mond (3.8 cm pro Jahr) zu messen, ein Effekt der mit der Verlangsamung der Erdrotation gekoppelt ist. LLR ist auch sehr gut geeignet, um verschiedene Theorien der Allgemeinen Relativität zu überprüfen.

1.1.6 Very Long Baseline Interferometry (VLBI)

Die *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI) ist das einzige nicht auf Satelliten beruhende geodätische Raumverfahren, das Beiträge zum *International Earth Rotation Service* (IERS) liefert. Bei dieser Technik werden gleichzeitig auf mehreren Stationen die Signale von extragalaktischen Radioquellen (Quasaren) aufgezeichnet. Die Signale dieser Stationen werden dann miteinander korreliert und daraus der Unter-

schied in der Ankunftszeit eines Signals bei den verschiedenen Stationen ermittelt (Lichtlaufzeitunterschiede). Da sich die Erde fortwährend dreht, können aus diesen Lichtlaufzeitunterschieden die Relativpositionen zwischen den Stationen und Erdrotationsparameter bestimmt werden.

Der einzigartige und fundamentale Beitrag der VLBI zur Geodäsie und Astronomie besteht in der Realisierung des raumfesten (inertialen) Referenzsystems mit der Genauigkeit eines Bruchteils einer Millibogensekunde und der Sicherung der Langzeitstabilität der Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Bezugsrahmen.

Das *International Celestial Reference System* (ICRS) wurde vom IERS definiert [Arias et al., 1995] und von der *International Astronomical Union* (IAU) 1998 zum primären Inertialsystem erklärt. Es hat damit die früheren optischen Realisierungen abgelöst.

Ein genaues, stabiles raumfestes System ist eine wichtige Voraussetzung für ein erdfestes Referenzsystem. In diesem Sinne spielt VLBI auch bei der Definition des erdfesten Systems und bei der Festlegung der Transformation zwischen den zwei Systemtypen eine entscheidende Rolle. Insbesondere ist VLBI die einzige Beobachtungstechnik, die wirklich UT1-UTC, d.h. die Differenz zwischen einer aus der Erdrotation abgeleiteten Zeit und der Atomzeit, mit hoher Genauigkeit und Stabilität bestimmen kann. Ebenso kann nur aus VLBI-Daten Präzession und Nutation mit einer Präzision besser als eine Millibogensekunde ermittelt werden.

Heutzutage werden die VLBI-Beobachtungen und Analysen durch den *International VLBI Service* (IVS) koordiniert.

1.1.7 Das Global Positioning System (GPS)

GPS ist die heute wohl bekannteste Beobachtungstechnik der Satellitengeodäsie. Dieses Satellitensystem hat begonnen, einen Einfluss auf Wissenschaft und Gesellschaft auszuüben, der weit über die Satellitengeodäsie hinausreicht. GPS hat das Vermessungswesen, die Zeithaltung und die Navigation zu Land, zu Wasser und in der Luft revolutioniert. Heute sind Millionen von kleinen Handempfängern in Gebrauch. Das Bestücken von Satelliten mit GPS-Empfängern hat in jüngster Zeit grosse Bedeutung für die Geodäsie und Atmosphärenphysik gewonnen.

GPS ist ein Navigationssystem, das es erlaubt, sich in Echtzeit auf oder in der Nähe der Erdoberfläche mit einer Genauigkeit von einigen Metern absolut zu positionieren. Eine unbeschränkte Anzahl Benutzer kann das System gleichzeitig verwenden. Absolute Positionierung bedeutet hier, dass die Koordinaten eines Punktes in einem geozentrischen erdfesten Referenzsystem mit nur einem GPS-Empfänger bestimmt werden können. Der GPS-Referenzrahmen, das *World Geodetic System 1984* (WGS-84), stimmt heute im Meterbereich mit dem *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) überein, das seinerseits vom IERS unterhalten wird.

Das Raumsegment des GPS besteht nominal aus 24 Satelliten. Die Satelliten sind in nahezu kreisförmigen Bahnen in sechs Bahnebenen angeordnet. Die Flughöhe beträgt rund 20'000 km. Die Bahnebenen liegen am Äquator 60 Grad auseinander und haben eine Bahnneigung von 55 Grad gegenüber dem Äquator. Die Umlaufzeit beträgt einen

halben Sterntag ($11^h 58^m$). Dies bedeutet, dass sich die Satellitenkonstellation für einen bestimmten Ort auf der Erde nach einem Sterntag (einem Sonnentag minus 4 Minuten) exakt wiederholt.

Abbildung 1.2 zeigt einen Block II GPS-Satelliten. Mit diesem Satellitentyp wurde die erste vollständige Konstellation aufgebaut. Wir unterscheiden zwischen dem Körper des Satelliten mit dem Antennenkranz, der zur Erde hin ausgerichtet wird, und den ‘‘Solar Panels’’. Die Orientierung des Satelliten erfolgt mit Hilfe von Schwungrädern und muss so geschehen, dass die Antennen immer auf den Mittelpunkt der Erde gerichtet sind und die Flächen der Solar Panels senkrecht zur Sonne stehen.



Abb. 1.2: GPS Block II Satellit

Jeder Satellit sendet Signale auf zwei Trägerfrequenzen aus, nämlich auf L_1 und L_2 mit Frequenzen von 1.57542 GHz und 1.22760 GHz (Wellenlänge von $\lambda_1 \approx 19$ cm und $\lambda_2 \approx 24$ cm). Zwei Arten von Codes sind auf den Trägern aufmoduliert. Sie erlauben es dem Empfänger, die sogenannte Pseudodistanz (*Pseudorange*) p_r^s zu messen. Die Pseudorange-Messung p_r^s und die geometrische Distanz ρ_r^s zwischen dem Satelliten zum Zeitpunkt der Signalemission und dem Empfänger zum Zeitpunkt des Signalempfangs sind durch die Beziehung

$$p_r^s = \rho_r^s + c(\Delta t_r - \Delta t^s) + \Delta \rho_{atm} \quad (1.1)$$

verknüpft, wobei Δt^s den Satellitenuhrfehler gegenüber der GPS-Systemzeit und Δt_r den Empfängeruhrfehler bezeichnet. $\Delta \rho_{atm}$ ist die Laufzeitkorrektur aufgrund der atmosphärischen Refraktion (Troposphäre und Ionosphäre).

Zusätzlich werden auf L_1 und L_2 unter Verwendung der Phasenmodulationstechnik Informationen für die Berechnung der Satellitenposition (sogenannte *Broadcast Ephemeriden*) und Satellitenuhrkorrekturen ausgesandt.

Es muss zwischen zwei Arten von Codes unterschieden werden, nämlich dem sogenannten *C/A-Code* (coarse acquisition code), der mit einer Genauigkeit von rund 3 m gemessen werden kann, und dem *P-Code* (precise code), der eine Messung im Bereich von 0.3 m erlaubt. Der P-Code ist zurzeit nur für privilegierte (mit einer Vollmacht des U.S. Department of Defense ausgestattete) Nutzer zugänglich. Der C/A-Code wird nur auf L_1 , der P-Code in einer verschlüsselten Version auf L_1 und L_2 übertragen. Die Broadcast-Bahnen haben gewöhnlich eine Genauigkeit von rund 3 m. Die Information über die Satellitenuhren wird zivilen Nutzern heute mit einer ähnlichen Qualität zur Verfügung gestellt, so dass die Genauigkeit der Echtzeitpositionierung auf ca. 10 m beschränkt bleibt.

Das Prinzip der absoluten Positionierung und Navigation mit GPS beruht dar-

auf, dass der GPS-Empfänger gleichzeitig die Signale mehrerer Satelliten empfängt. Verwenden wir die Satellitenpositionen (berechnet aus den Broadcast-Bahninformationen), die von den Satelliten übermittelten Satellitenuhrkorrekturen und ein einfaches Modell für die Berücksichtigung der atmosphärischen Refraktion, so bleiben in Gleichung (1.1) nur vier Unbekannte übrig, nämlich die drei Koordinaten der Empfängerposition und der Empfängeruhrfehler Δt_r , vorausgesetzt, dass wir nur gleichzeitige Messungen verwenden. Es ist daher notwendig und es genügt auch, dass ein Empfänger gleichzeitig vier Satelliten verfolgt, um seine momentane Position (und einen Empfängeruhrfehler) mit einer Genauigkeit von ein paar Metern (oder rund 10 m für Benutzer ohne Zugang zum P-Code) zu bestimmen. Die GPS-Konstellation ist in der Tat so geplant worden, dass vier oder mehr Satelliten von jedem Punkt der Erde aus und zu jeder Tageszeit sichtbar sein sollten.

Für wissenschaftliche Anwendungen spielt die Phasenmessung die zentrale Rolle. Sie ist im Grunde identisch mit der sogenannten akkumulierten (integrierten) Dopplermessung des NNSS und hat auch viele Ähnlichkeiten mit der Pseudorange-Messung. Aus mathematischer Sicht gibt es nur zwei wesentliche Unterschiede zwischen Phase und Code, nämlich die viel höhere Messgenauigkeit bei Verwendung der Phase (Millimeter statt Meter) und eine zusätzliche Unbekannte pro Satellit, die sogenannte Phasenmehrdeutigkeit (Initial Phase Ambiguity) N_r^s . Alle GPS-Empfänger, die für geodätische Anwendungen mit hohen Genauigkeitsanforderungen verwendet werden, zeichnen daher neben den Code-Messungen auch die Phasenmessungen auf L_1 und L_2 auf.

Mit Hilfe von Phasenmessungen können lokale GPS-Netze mit Millimeter-, regionale und globale Netze mit Zentimetergenauigkeit vermessen werden. Dies ist nur möglich, falls präzise GPS-Bahnen und Satellitenuhrkorrekturen zur Verfügung stehen, wie sie beispielsweise vom *International GPS Service* (IGS) erzeugt werden.

Über 200 Stationen (verteilt über die ganze Erde) beobachten sämtliche sichtbaren GPS-Satelliten und übermitteln ihre Daten z.T. stündlich an die IGS-Datenzentren. Die gesammelten Daten werden wiederum von den IGS-Analysezentren ausgewertet, und "rapid" sowie "final" Produkte werden erzeugt. Schnelle Produkte sind nach etwa einem Tag, definitive Produkte nach ungefähr 11 Tagen für die Benutzer verfügbar. Unter den täglichen Produkten finden sich die Satellitenbahnen mit einer Genauigkeit von rund 5–10 cm (rapid orbits), Satellitenuhrkorrekturen mit einer Genauigkeit von rund 0.3 ns ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$), tägliche Werte der Polschwankung (Stellung der Erdachse im erdfesten System) mit einer Genauigkeit von 0.1 Millibogensekunden (was auf der Erdoberfläche 3 mm entspricht) und die Tageslänge mit einer Genauigkeit von $30 \mu\text{s}/\text{Tag}$. Diese Produkte sind wichtige Beiträge zur Erfassung der Erdrotation.

Zudem berechnet der IGS wöchentliche Koordinatenlösungen für die Stationen im globalen GPS-Netz. Diese Resultate werden zusammen mit denjenigen anderer geodätischer Raumverfahren verwendet, um das ITRF zu realisieren.

IGS-Produkte (Bahnen, Erdrotationsparameter, Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten) bilden die Grundlage für die Vermessung regionaler Punktfelder, für geodynamische Studien (z.B. das kalifornische SCIGN (<http://www.scign.org>) oder das japanische 1000-Empfänger-Netz für die Erdbebenüberwachung) oder

für die Einrichtung und Überwachung von regionalen Referenznetzen (z.B. das EUREF-Netz (<http://www.epncb.oma.be>) oder das SIRGAS-Netz in Südamerika (<http://www.dgfi.badw-muenchen.de/gps/sirgas.html>)).

Mehr und mehr wird das IGS-Netz auch für nicht-geodätische Zwecke genutzt. Wir wollen hier nur den Zeit- und Frequenztransfer und das Monitoring der Ionosphäre erwähnen. [Beutler *et al.*, 1999] enthält weitere Informationen zu den interdisziplinären Anwendungen des IGS.

Von der Satellitengeodäsie aus gesehen kommen von GPS ganz wesentliche Beiträge zur Realisierung und Verdichtung des erdfesten Referenznetzes und zur zeitlich hochaufgelösten Bestimmung der Erdrotationsparameter. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass GPS — wie jedes Satellitenverfahren — weder für UT1 noch für Präzession und Nutation Langzeitstabilität liefern kann. Ausserdem ist GPS, obwohl es sich um ein Satellitenverfahren handelt, nicht gut geeignet, Parameter des Gravitationsfeldes der Erde oder die Bewegung des Stationspolyeders in Bezug auf das Geozentrum (Massenschwerpunkt der Erde) zu bestimmen. Die Bahnhöhe der GPS-Satelliten ist hier der begrenzende Faktor.

Weitere Informationen über GPS als Instrument für Geodäsie und Geodynamik finden sich in [Teunissen and Kleusberg, 1998].

1.1.8 Andere Satelliten-Mikrowellenverfahren

Das russische *Global Navigation Satellite System* (GLONASS) ist dem GPS sehr verwandt. Es gibt daher kombinierte GPS/GLONASS-Empfänger. Solche Empfänger wurden in der ersten globalen GLONASS-Kampagne (IGEX-98: International GLONASS Experiment 1998) eingesetzt. Das Experiment hat bestätigt, dass eine kombinierte Auswertung von GPS- und GLONASS-Beobachtungen für wissenschaftliche Studien und für Navigation sehr fruchtbar sein kann. In Zukunft wird auch das europäische Galileo-System eine wichtige Rolle spielen.

Das französische DORIS-System (*Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite*) hat sich als sehr effizientes Instrument für die Bestimmung von Satellitenbahnen erwiesen. Es ist unter anderem eines der Bahnbestimmungsverfahren für den Satelliten Topex/Poseidon. DORIS besitzt eine sehr homogene globale Stationsverteilung. Dies ist einer der Gründe, wieso DORIS als ein offizielles geodätisches Raumverfahren vom IERS akzeptiert wurde.

Das deutsche PRARE-System (*Precise Range and Range-rate Equipment*) kann als das deutsche Gegenstück zum französischen DORIS angesehen werden. Es findet vor allem als Bahnbestimmungsinstrument (z.B. für den ESA-Satelliten ERS-2) Verwendung.

1.1.9 Satellitenmissionen

In der Vergangenheit gab es bereits viele Satellitenmissionen, bei denen der Satellit als Beobachtungsplattform verwendet wurde, um für die Geodäsie und Geodynamik wesentliche Untersuchungen durchzuführen. Insbesondere haben Altimetrie-Missionen unser Verständnis der Topographie der Meeresoberfläche (*Sea Surface To-*

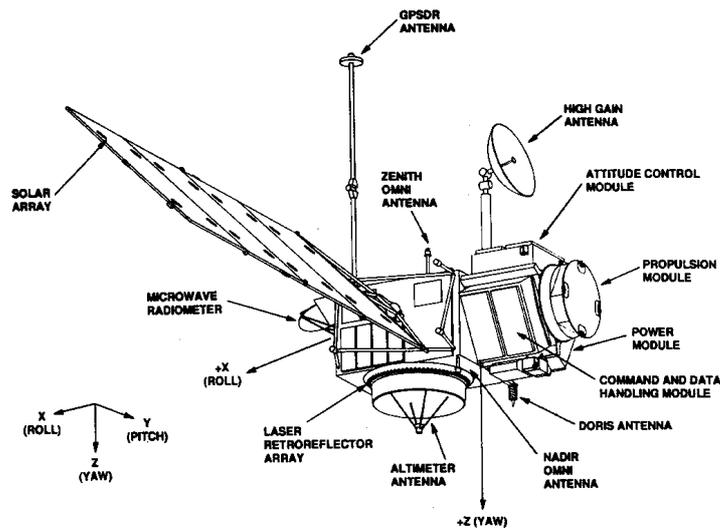


Abb. 1.3: Der Topex/Poseidon-Satellit

pography), der Meeresströmungen und der Meereszeiten usw. wesentlich verbessert. Abbildung 1.3 zeigt den Topex/Poseidon-Satelliten. Die Topex/Poseidon-Mission ist ein gemeinsames Altimetrie-Projekt der Franzosen und Amerikaner. Es ist eigentlich die erste Mission, die speziell für Untersuchungen im Zusammenhang mit Meeresströmungen geplant wurde. Ein ganzer Band des Journal of Geophysical Research ist dieser Mission gewidmet [*JGR*, 1994].

Für die Satellitengeodäsie war die Topex/Poseidon-Mission deshalb von besonderer Bedeutung, weil die Bahn des Satelliten mit drei unabhängigen Beobachtungstechniken bestimmt wurde: mit dem französischen DORIS-System, mit SLR und mit GPS. Alle drei Systeme stellten ihre Fähigkeiten unter Beweis. Die radiale Komponente der Bahn, die für Altimetermessungen äußerst wichtig ist, konnte mit einer Genauigkeit von ein paar Zentimetern bestimmt werden. Topex/Poseidon ist weder die erste Altimetermission gewesen noch wird es die letzte sein.

Für die Geodäsie, die Geodynamik und die Atmosphärenphysik sind die kommenden Missionen *CHAMP* (Challenging Mini-Satellite Payload for Geophysical Research and Application; Deutschland), *GRACE* (Gravity Recovery and Climate Experiment; USA und Deutschland) und *GOCE* (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer; ESA-Mission) besonders faszinierend. Es wird erwartet, dass durch diese Missionen unser Wissen über das Gravitationsfeld der Erde mit Hilfe von GPS-Empfängern, Beschleunigungsmessern und Gradiometern auf den Satelliten, um die nicht-gravitativen Kräfte und Schwerefeldgradienten zu messen, signifikant erweitert wird.

CHAMP, *GRACE* und *GOCE* haben auch Instrumente an Bord, um Profile der Atmosphäre mit der sogenannten *Occultation Method* zu erzeugen: die Signale (Code und Phase) eines GPS-Satelliten werden von einem GPS-Empfänger auf einem tief-fliegenden Satelliten (*LEO*: Low Earth Orbiter) registriert, während der GPS-Satellit

Dienst	Name, Aufgabe und Web-Adresse
CSTG	<i>Commission on International Coordination of Space Techniques for Geodesy and Geodynamics.</i> Koordination zwischen den Organisationen im Rahmen der geodätischen Raumverfahren. Organisation von Projekten. http://dgfi2.dgfi.badw-muenchen.de/cstg
IERS	<i>International Earth Rotation Service.</i> Realisierung und Weiterführung des raumfesten und erdfesten Referenzsystems; Bereitstellung von kombinierten Serien von Erdrotationsparametern. http://hpiers.obspm.fr
IGS	<i>International GPS Service.</i> Bereitstellung der GPS-Daten des globalen Netzes; Berechnung von hochgenauen Satellitenbahnen, Erdrotationsparametern, Stationskoordinaten, Information über die Atmosphäre, usw. http://igsceb.jpl.nasa.gov
ILRS	<i>International Laser Ranging Service.</i> Sammeln, Archivieren und Verteilen von SLR- und LLR-Daten; Erzeugen von wissenschaftlichen und operationellen Produkten. http://ilrs.gsfc.nasa.gov
IVS	<i>International VLBI Service for Geodesy and Astrometry.</i> Betreiben und Unterstützen von VLBI-Beobachtungsprogrammen; Organisation der geodätischen, astrometrischen und geophysikalischen Forschung und der operationellen Aktivitäten. http://ivscc.gsfc.nasa.gov

Tabelle 1.1: Organisationen im Bereich “Space Geodesy”

aus der Sicht des LEO hinter der Erdatmosphäre untergeht. Diese Entwicklungen bestätigen unsere Annahme, dass interdisziplinäre Aspekte in der Satellitengeodäsie immer grössere Bedeutung erlangen.

1.1.10 Wichtige Organisationen

Tabelle 1.1 gibt einen Überblick über die wichtigsten Dienste im Zusammenhang mit geodätischen Raumverfahren. Alle diese Organisationen gehören der *International Association of Geodesy* (IAG) an. Der IERS und der IVS sind zudem Dienste der *International Astronomical Union* (IAU). Der IERS, der IGS und der IVS sind ausserdem Mitglieder der *Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis Services* (FAGS).

Der IGS, der IVS und der ILRS sind Dienste für die entsprechenden individuellen geodätischen Raumverfahren. Dagegen hat der IERS mit Beiträgen sämtlicher Beobachtungstechniken zu tun. Er wurde 1988 gegründet als Nachfolger des *International Polar Motion Service* (IPMS) und desjenigen Zweiges des *Bureau International de*

l'Heure (BIH), der sich mit der Erdrotation befasst hat. Die IERS-Produkte basieren auf den Resultaten der individuellen Beobachtungstechniken.

Die CSTG ist eine Kommission der IAG und zugleich eine Sub-Kommission von COSPAR (*Committee on Space Research*). Die CSTG hat eine koordinierende Funktion innerhalb der Space Geodesy. In der Zeit von 1995–99 war die CSTG beispielsweise verantwortlich für die Einrichtung des IVS und des ILRS und für die Organisation der ersten globalen GLONASS-Kampagne (IGEX-98).

Weitere Informationen zu den einzelnen Diensten können im WWW unter den in Tabelle 1.1 angegebenen Adressen gefunden werden.

2. Die geodätischen Raumverfahren

Drei primäre Beobachtungstechniken bilden heute das Fundament der *Space Geodesy*, nämlich

- *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI): die Beobachtung von extragalaktischen Radioquellen mit grossen Radioteleskopen.
- *Satellite Laser Ranging* (SLR) und *Lunar Laser Ranging* (LLR): Beobachtung spezieller Erdsatelliten oder des Mondes mit kurzen Laserpulsen.
- Beobachtung von Satelliten im Mikrowellenbereich: Die wichtigsten Beobachtungs- oder Satellitensysteme sind hier:
 - das amerikanische *Global Positioning System* (GPS)
 - das russische *Global Navigation Satellite System* (GLONASS)
 - das französische Dopplersystem *Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite* (DORIS)
 - das deutsche *Precise Range and Range-Rate Equipment* (PRARE)

Diese geodätischen Raumverfahren werden ergänzt durch weitere Beobachtungstechniken wie

- *Satellitenaltimetrie*: Messung der Meereshöhe mit kurzen Mikrowellenpulsen, die an der Meeresoberfläche reflektiert werden.
- Neue *Satellitenmissionen* (CHAMP, GRACE, GOCE, ...) mit einem GPS-Empfänger, Beschleunigungsmessern und Gradiometern (Messung der Schweregradienten, also der räumlichen Änderungen des Schwerefeldes) an Bord zur hochauflösenden Bestimmung des Erdschwerefeldes.
- *Synthetic Aperture Radar* (SAR): Die Verwendung von Radarphasendifferenzen zwischen zwei zeitlich auseinanderliegenden Satellitenbildern desselben Gebietes für die flächenhafte Bestimmung der zwischenzeitlich erfolgten Deformationen.
- *Astrometrie*: Optische Aufnahmen von Satelliten gegenüber dem Sternenhintergrund mit der CCD-Technik (CCD: Charge-Coupled Device).

Die geodätischen Raumverfahren liefern heute mit ihren Beobachtungen die Grundlage für die 4 Hauptaufgaben der *Space Geodesy*:

- Bestimmung präziser Koordinaten für die extragalaktischen Radioquellen (Quasare) und Erfassung von deren Quellenstruktur.
- Bestimmung von präzisen globalen, regionalen und lokalen dreidimensionalen Punktfeldern.
- Bestimmung der Rotation der Erde, d.h. der Transformationsparameter zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem.

- Bestimmung des Erdschwerefeldes und linearer Funktionen dieses Feldes, sowie dessen zeitliche Variation.

Die Bestimmung präziser Quasarkoordinaten (mit VLBI) ist die Grundlage für die Realisierung, Überwachung und Verbesserung des raumfesten Referenzsystems ICRS (International Celestial Reference System). Ein genaues raumfestes Referenzsystem ist wiederum die Voraussetzung für das Studium der Bewegung der Erde im Raum.

Die Bestimmung von präzisen Koordinaten (und Geschwindigkeiten) von Punkten beinhaltet insbesondere die Realisierung, Überwachung und Verbesserung des erdfesten Referenzsystems ITRS (International Terrestrial Reference System) und die Verdichtung dieses Referenzsystems bis hin zu regionalen und lokalen Netzen und betrifft daher auch den ganzen Bereich der Landesvermessung. Die Bestimmung hochgenauer Punktkoordinaten in einem klar definierten Referenzsystem ist ebenfalls eine wichtige Grundlage für die meisten geodynamischen und geophysikalischen Untersuchungen (Krustenbewegungen, Gezeitenwirkung, Erdrotation, ...) und für die Präzisionsnavigation.

Die Bestimmung von genauen Erdrotationsparametern ermöglicht erst die Transformation zwischen dem raumfesten und dem erdfesten Bezugssystem. Genaue Kenntnis der Erdrotation ist nicht nur wichtig für die Astronomie, Weltraummissionen und die Berechnung von Satellitenbahnen (Inertialsystem), sondern auch für das Verstehen des Aufbaus der Erde und derjenigen geophysikalischen Prozesse, die einen Einfluss auf die Erdrotation haben. Dazu gehören sämtliche Massenverschiebungen und Strömungen innerhalb der Erde, in den Ozeanen und der Atmosphäre (gekoppeltes System Erde/Ozeane/Atmosphäre).

Die Bestimmung des Erdschwerefeldes schliesslich beinhaltet auch die Realisierung eines globalen, regionalen und lokalen Höhensystems, eines detaillierten Geoids als Höhenbezugsfläche im Land- und Meeresbereich. Die Kenntnis des Schwerefeldes ermöglicht Rückschlüsse auf viele geodynamische und geophysikalische Phänomene.

Jede der oben genannten Beobachtungstechniken hat ihre Stärken und Schwächen. Einen Überblick über die wichtigsten Beiträge der Hauptbeobachtungstechniken gibt Tabelle 2.1. Man sieht darin beispielsweise, dass nur VLBI zur Realisierung des raumfesten Referenzsystems beitragen und UT1- sowie Nutationsparameter bestimmen kann, dass aber alle Verfahren Information über das erdfeste System (ITRF), die Polschwankung und die Tageslänge enthalten usw.

Die von den individuellen Techniken erreichbare Genauigkeit ist heute insbesondere durch systematische Fehler begrenzt. Man ist daher bestrebt, die verschiedenen Raumverfahren möglichst stark zu integrieren und zu kombinieren in Richtung auf ein "Integrated Global Geodetic Observing System" (IGGOS).

Tabelle 2.1: Parameterraum der grundlegenden geodätischen Raumverfahren. (ERP: Erdrotationsparameter, LEO: Low Earth Orbiter)

Parametertyp	VLBI	GPS GLO.	DORIS PRARE	SLR	LLR
Radioquellen (ICRF)	X				
Nutation	X	(X)			X
Polschwankung	X	X	X	X	X
UT1	X				
Tageslänge		X	X	X	X
Hochfrequente ERP	X	X			
Meereszeitenampl. (ERP)	X	X		X	
Koord.+Geschwind. (ITRF)	X	X	X	X	X
Geozentrum		X	X	X	
Koeff. des Schwerefeldes		X	X	X	(X)
Bahnparameter		X	X	X	X
Bahnbest. für LEOs		X	X	X	
Ionosphäre	(X)	X	(X)		
Troposphäre	X	X	X		
Uhren (Zeittransfer)	(X)	X		(X)	

2.1 Very Long Baseline Interferometry (VLBI)

2.1.1 Einführung

Die *Very Long Baseline Interferometry* gehört zwar nicht zu den Verfahren der Satellitengeodäsie im engeren Sinne, sie spielt jedoch eine zentrale Rolle in der *Space Geodesy* bei der Bestimmung geodätisch-geodynamischer Parameter (Stationskoordinaten, Erdrotation, Gezeiteneffekte, Atmosphäre) und der Festlegung des raumfesten Bezugssystems. Die Auswerteverfahren und die Effekte, die bei der Verarbeitung berücksichtigt werden müssen, sind in vielen Bereichen mit denen des GPS identisch (z.B. die atmosphärische Refraktion).

Interferometrische Beobachtungen von extraterrestrischen Radioquellen werden von Astronomen durchgeführt, um Informationen über die Struktur und Entwicklung von Sternen, Galaxien und des interstellaren Mediums zu erhalten. Die moderne Radioastronomie hat ihren Ursprung in den 30er Jahren, als K. Jansky die ersten extra-

terrestrischen Radioquellen entdeckte. Damit begann auch die Entwicklung der Radiointerferometrie. Die Winkelauflösung eines Teleskops ist näherungsweise gegeben durch (Beugungstheorie):

$$\sigma \approx \frac{\lambda}{D} \quad (2.1)$$

wobei:

- σ Auflösungsvermögen des Teleskops
- λ Wellenlänge der untersuchten Strahlung
- D Durchmesser des Teleskops

Weil die wichtigsten Radiosignale Wellenlängen von ein paar Zentimetern haben, ist die Auflösung eines Radioteleskops um Größenordnungen schlechter als diejenige eines optischen Teleskops mit demselben Durchmesser. Zum Beispiel müsste ein Teleskop, das Strahlung mit einer Wellenlänge von 3.75 cm (≈ 8 GHz) empfängt, einen Durchmesser von 15 km haben, um dieselbe Auflösung zu erreichen wie ein optisches Fernrohr mit einem Durchmesser von rund 20 cm. Um nicht solch riesige Radioteleskope bauen zu müssen, hat man versucht, den Durchmesser des Empfangsteleskops durch Verbindung von Einzelteleskopen zu vergrößern. Dabei wird die Länge der Basislinie zwischen den Teleskopen zum eigentlichen Durchmesser des "Gesamteleskops". Bei den ursprünglichen Interferometrie-Experimenten wurden die an beiden Enden der Basislinie empfangenen Radiosignale per Kabel zu einem Korrelator gebracht, um die Laufzeit- und Phasendifferenzen zu bestimmen.

Da Kabelverbindungen über mehr als einige Kilometer technisch und wirtschaftlich nicht realisierbar sind, ist man dazu übergegangen, die Einzelteleskope unabhängig voneinander zu betreiben. Dies wurde allerdings erst möglich durch die Entwicklung sehr stabiler und genauer Zeit- und Frequenznormale für die Zeitsynchronisierung. Die einzige Einschränkung für die Basislinienlänge besteht jetzt darin, dass die beobachtete Radioquelle gleichzeitig von beiden Stationen aus sichtbar sein muss. Der effektive Durchmesser kann also beinahe einen Erddurchmesser betragen. Das entsprechende Auflösungsvermögen liegt bei etwa 0.001" (1 Millibogensekunde entspricht 3 cm auf der Erdoberfläche vom Erdzentrum aus gesehen).

Die ersten Resultate mit unabhängigen Uhren an beiden Enden einer Basislinie wurden 1967 von kanadischen und amerikanischen Teams erzielt. Diese Projekte waren sehr stark durch astrophysikalische Studien motiviert, aber das Potential dieser Methode für geodätische und geophysikalische Untersuchungen wurde bereits damals erkannt. Sogar die optimistischsten Erwartungen von damals sind erreicht oder gar übertroffen worden.

2.1.2 Das Grundprinzip der VLBI

Das Grundprinzip der geodätischen VLBI besteht in der simultanen Beobachtung einer extragalaktischen Radioquelle durch zwei oder mehr Radioteleskope (siehe Abbildung 2.1). Gewöhnlich dauert dabei eine Beobachtungssession rund 24 Stunden. Wenn wir eine (wegen der riesigen Distanz der Objekte als eben angenommene) Wel-

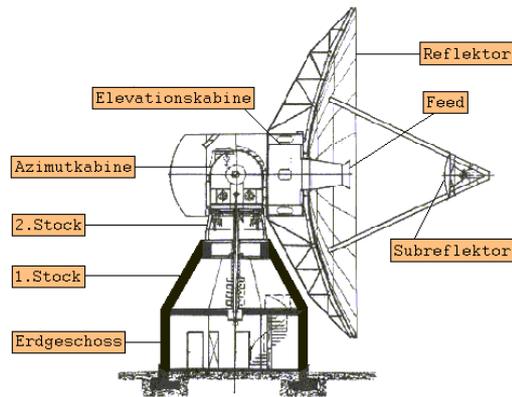
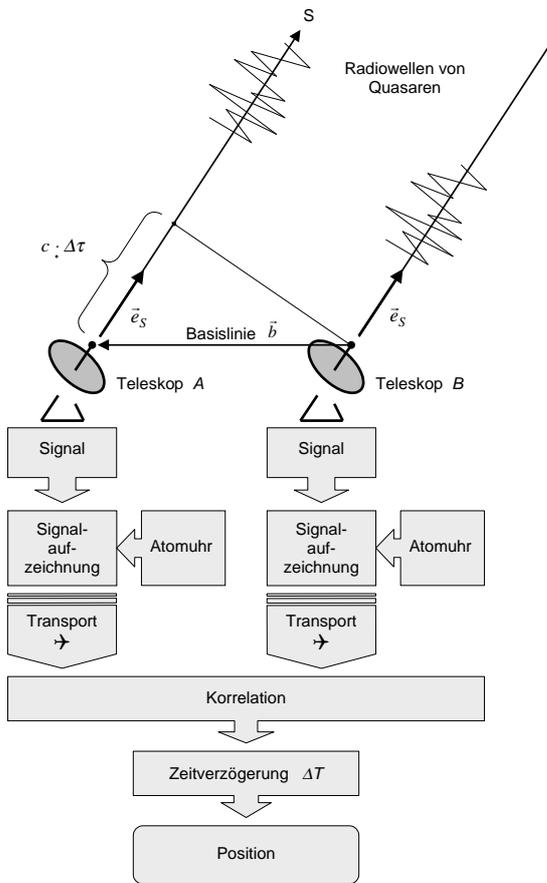


Abb. 2.1: VLBI-Beobachtungen.

Abb. 2.2: Das 20 m-Radioteleskop der Fundamentalstation Wettzell.

lenfront betrachten, die über eine Basislinie \mathbf{b} hinwegläuft, so wird sie im allgemeinen bei einer Antenne früher ankommen als bei der anderen. Die Differenz zwischen den zwei Ankunftszeiten, die sogenannte *Laufzeitdifferenz* $\Delta\tau$ (engl. delay) ist die primäre Beobachtungsgröße. Diese Laufzeitdifferenz hängt von der Orientierung der Basislinie gegenüber der Quelle und der Länge der Basislinie ab gemäss

$$\Delta\tau = -\frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_s \quad (2.2)$$

Dabei ist

- $\Delta\tau$ Laufzeitdifferenz
- \mathbf{b} Basislinienvektor
- \mathbf{e}_s Einheitsvektor in Richtung der Radioquelle
- c Lichtgeschwindigkeit

Mit der zeitlichen Änderung der Laufzeitdifferenz, hauptsächlich aufgrund der Erdrotation, erhält man als zweite Observable die sogenannte *Laufzeitänderung* $\Delta\dot{\tau}$ (engl. delay rate). Die Laufzeitdifferenz kann man (vereinfacht) als direkte Messung derjenigen Komponente der Basislinie \mathbf{b} auffassen, die in der Richtung der Radioquelle liegt. Die vor allem durch die Erdrotation bedingte Laufzeitänderung enthält nur den äquatorialen Anteil dieser Komponente, aber keine Information über den Anteil in Richtung der Erdrotationsachse.

Beobachtet man im Laufe eines Tages viele Radioquellen (typischerweise mit Beobachtungszeiten von 5-10 Minuten pro Quelle, was ein genau vorgegebenes Messprogramm voraussetzt), so lassen sich daraus die interessierenden Parameter, nämlich die Basisvektoren \mathbf{b} zwischen den Antennen und/oder die Richtungen zu den Quellen \mathbf{e}_s bestimmen.

Jede Beobachtungsstation empfängt unabhängig von den anderen die von einer Radioquelle ausgesendeten Signale. Da wegen der grossen Distanzen von etwa 1000–10'000 km eine Synchronisierung der Zeitnormale an den Stationen nicht möglich ist, muss die empfangene Strahlung an den Radioteleskopen digitalisiert und mit Zeitmarken versehen auf Magnetbänder aufgezeichnet werden. Die Anforderung an die Zeithaltung (Stabilität s des Zeitnormals) für eine 10-minütige Beobachtung einer Radioquelle lässt sich wie folgt abschätzen:

$$s = \frac{\delta\Delta\tau}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Dabei ist $\delta\Delta\tau$ die über das Beobachtungsintervall Δt eines Quasars aufrecht zu erhaltende Genauigkeit der Laufzeitdifferenzmessungen. Mit $\delta\Delta\tau = 6$ ps (2 mm) und $\Delta t = 600$ s ergibt sich eine geforderte Stabilität des Oszillators von $s = 1 \cdot 10^{-14}$. Diese hohen Anforderungen werden bislang nur von Wasserstoff-Masern erfüllt. Es ist auch wichtig, dass der Oszillator über die Dauer der gesamten Beobachtungssession (gewöhnlich 24 Stunden) sehr stabil ist.

2.1.3 Radioquellen

Radioquellen schicken Signale in einem breiten Frequenzbereich aus, die Empfänger sind aber nur sensitiv für spezifische Frequenzen. Signale ausserhalb dieses Frequenzbereichs werden ignoriert. Typische Frequenzen liegen im X-Band (ca. 8 GHz oder 4 cm Wellenlänge) und im S-Band (2 GHz, 15 cm). Oft haben Radioquellen eine komplexe Struktur mit einer Ausdehnung von bis zu 60" und sind daher nicht für die geodätische VLBI geeignet. Viele Radioquellen liegen ausserhalb unserer Galaxie und sind daher ideale Objekte für die Festlegung eines Inertialsystems. Rund 600 Quasare sind bisher mit Hilfe der VLBI vermessen worden. Darunter sind etwa 200 Radioquellen, die das ICRS (International Celestial Reference System) definieren. Abbildung 2.3 zeigt die Verteilung dieser definierenden Radioquellen. Man sieht, dass die Südhalbkugel noch nicht so gut abgedeckt ist wie die Nordhalbkugel, da die meisten Radioteleskope auf der Nordhalbkugel stehen. Die Genauigkeit der Koordinaten der Radioquellen (siehe Abb. 2.4) und damit die Genauigkeit der Realisierung des

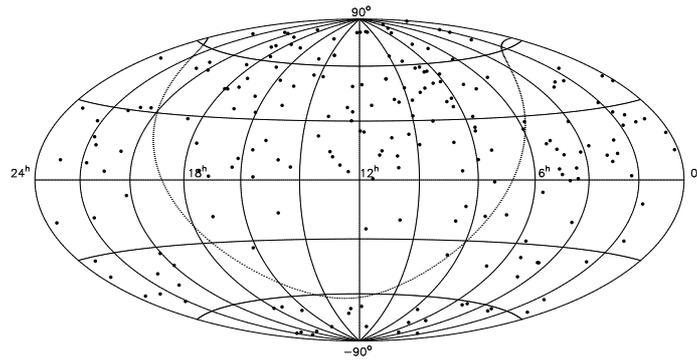


Abb. 2.3: Verteilung der 212 Radioquellen am Himmel, die das ICRS definieren.

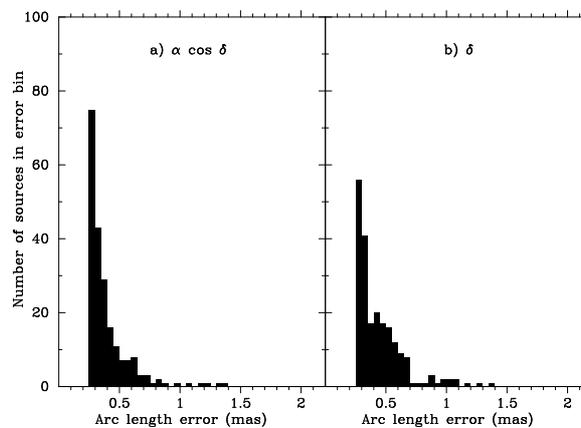


Abb. 2.4: Genauigkeit der Rektaszension α und der Deklination δ der Radioquellen, die das ICRS festlegen, in Millibogensekunden (mas).

ICRS liegt bei ungefähr einer halben Millibogensekunde. Dies entspricht dem Winkel, unter dem man von München aus einen 1.5 cm grossen Gegenstand in New York sehen würde. Die Genauigkeit ist heute insbesondere durch die oben erwähnte *Struktur* der Radioquellen beschränkt, da auch Quasare — obschon sie Milliarden von Lichtjahren entfernt sind — nicht als punktförmige Objekte erscheinen.

2.1.4 Instrumentierung und Signalverarbeitung

Zu den Instrumenten einer VLBI-Station gehören neben dem Empfänger ein hochgenaues Zeit- und Frequenznormal und eine Bandstation. Da die Quasarsignale mit einer Signalfussdichte von etwa 1 Jansky ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$) äusserst schwach sind, braucht es grosse Teleskope (Effelsberg bei Bonn: 100 m Durchmesser; Mojave Desert in Kalifornien: 64 m), um sie zu detektieren.

Bei einer Cassegrain-Antenne (siehe Abb. 2.2) trifft das einfallende Signal zuerst auf den parabolischen Primärreflektor, wird von dort zum hyperbolischen Subreflektor reflektiert und erreicht von dort schliesslich das sogenannte *Feed Horn* auf der Hauptachse des Systems, ein Zwei-Band-Empfangshorn, welches für die Spektralbereiche

ausserhalb der jeweils gewünschten Ausschnitte im X- und S-Band eine Filterfunktion erfüllt. Nach dem Feed Horn gelangt das Signal in einen ersten Vorverstärker, der mit komprimiertem Helium auf 20–60 K tiefgekühlt werden muss, um das Signal rauscharm zu halten. Das empfangene Signal besitzt jedoch eine zu hohe Frequenz, um direkt mit der nötigen Auflösung aufgezeichnet zu werden. Daher wird dieses Signal der Frequenz f_r mit einem rein harmonischen Signal gemischt, das vom lokalen Oszillator mit einer ähnlichen Frequenz f_0 erzeugt wird. Das entstehende Signal mit der Schwebefrequenz $f_r - f_0$ liegt typischerweise im Bereich von einigen MHz und wird in Intervallen von einigen 10-100 Nanosekunden (10^{-9} s) erfasst und auf tiefstem Niveau digitalisiert, d.h. in eine Bit-Folge von Einsen (positive Amplitude) und Nullen (negative Amplitude) umgewandelt. Es ist diese Bit-Folge, die mit den Zeitmarken auf das Magnetband gespielt wird. Bei einer Datenrate von 100 Nanosekunden muss die Aufzeichnungsrate auf Band etwa 10^7 Bit/s betragen. Dies ergibt eine Datenmenge von einigen Gigabits für jede Radioquelle, die während einigen Minuten beobachtet wird.

Das Datenerfassungssystem Mark III — im Jahre 2001 durch das neue und noch leistungsfähigere Mark IV ersetzt — konnte bis zu 28 Kanäle gleichzeitig aufzeichnen, wobei jeder Kanal einen Frequenzbereich von rund 2 MHz Bandbreite enthält. Wegen der Datenflut werden jedoch meist nur 7–14 Kanäle genutzt. Würde nur ein Frequenzband von $B_0 = 2$ MHz verwendet, so würde sich eine Verzögerungsbreite $\delta\Delta\tau$ (Fouriertransformation der Frequenzbreite B_0 in den Zeitbereich) von

$$\delta\Delta\tau \approx \frac{1}{B_0} \quad (2.4)$$

ergeben. Diese Verzögerungsbreite kann bei der Messung auf etwa 1/100 aufgelöst werden. Damit könnte man eine Genauigkeit für die Laufzeitdifferenzmessung im Meterbereich erreichen:

$$\delta\Delta\tau c \approx \frac{c}{100 B_0} = 3 \cdot 10^8 / (100 \cdot 2 \cdot 10^6) \text{ m} = 1.5 \text{ m} \quad (2.5)$$

Durch die Aufzeichnung mehrerer schmaler Frequenzbänder über einen grösseren Frequenzbereich (sogenannte *Frequenzbandbreitensynthese*) wird jedoch die Gesamtfrequenzbreite $B = f_{max} - f_{min}$ wirksam und man erhält Millimetergenauigkeit für die Laufzeitdifferenzen.

2.1.5 Korrelator und Beobachtungsgrössen

Sobald die Magnetbänder beim Korrelator eingetroffen sind, werden die aufgezeichneten Signale aller beteiligten Stationen paarweise korreliert. Solche Korrelatoren gibt es in den USA, in Bonn und in Japan. Sie bestehen aus spezieller Hardware für Signalverarbeitung, um durch Vergleich der aufgezeichneten Bit-Folgen die Laufzeitunterschiede zu ermitteln. Kurz gesagt werden die zwei Bit-Folgen, die die Antennenspannungen $V_1(t)$ und $V_2(t)$ als Funktion der Zeit t darstellen, in der Zeit so gegeneinander verschoben, bis ihre Kreuzkorrelationsfunktion R maximal wird:

$$R(\Delta\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T V_1(t) V_2^*(t - \Delta\tau) dt \quad (2.6)$$

T ist dabei das Mittelungsintervall, der Stern bezeichnet das komplex-konjugierte Signal und $\Delta\tau$ ist der Laufzeitunterschied. Es ist wichtig zu wissen, dass dabei nur etwa jedes tausendste oder zehntausendste Bit zwischen den zwei Stationen korreliert (extrem kleines Signal-Rausch-Verhältnis)!

Genauer betrachtet treten bei der Überlagerung (Korrelation) in Abhängigkeit der Phasenlage der zwei Signale Verstärkungen und Abschwächungen der Amplitude auf. Durch die rotierende Erde wird die Phasenlage nicht linear geändert. Es zeigen sich also Interferenzstreifen, die aufgrund der sich ändernden Beobachtungsgeometrie mit einer sich langsam verändernden Frequenz, der sogenannten *Streifenfrequenz*, auftreten. Aus der Korrelation erhält man also im Abstand von 1–2 Sekunden die Phasen und Amplituden der Interferenzstreifen und dies natürlich für alle parallel aufgezeichneten Frequenzkanäle (typischerweise 14 Kanäle). Die Streifenphasen $\Phi(\omega_i, t_i)$ (*fringe rate*) für die Frequenzkanäle ω_i und die Zeitpunkte t_i werden dann in eine Ausgleichung eingeführt, um die besten Werte der Observablen, nämlich der *Phase* Φ_0 , der *Gruppenverzögerung* (*group delay*) $\Delta\tau_g$ und der *Phasenverzögerungsrate* (*phase-delay rate*) $\Delta\dot{\tau}_p$ zu bestimmen mit dem folgenden bilinearen Ansatz:

$$\Phi(\omega_i, t_i) = \Phi_0(\omega_0, t_0) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right|_{(\omega_0, t_0)} (\omega_i - \omega_0) + \left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{(\omega_0, t_0)} (t_i - t_0) \quad (2.7)$$

wobei die folgenden Definitionen gelten:

$$\Delta\tau_p = \frac{\Phi_0}{\omega_0} \quad \text{phase delay} \quad (2.8a)$$

$$\Delta\tau_g = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} \right|_{(\omega_0, t_0)} \quad \text{group delay} \quad (2.8b)$$

$$\Delta\dot{\tau}_p = \frac{1}{\omega_0} \left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{(\omega_0, t_0)} \quad \text{phase-delay rate} \quad (2.8c)$$

In der geodätischen VLBI werden eigentlich als Observable nur der *group delay* und die *phase-delay rate* verwendet, da der *phase delay* eine Mehrdeutigkeit von $2\pi N$ besitzt (wegen der Mehrdeutigkeit der Phase Φ_0 ist auch $\Delta\tau_p = \Phi_0/\omega_0$ mehrdeutig), die sich nur auf sehr kurzen Basislinien auflösen lässt. Eine weitere mögliche Observable, die *group delay rate* $\Delta\dot{\tau}_g$ wird nicht verwendet, da sie viel zu wenig genau gemessen werden kann. Die formalen Fehler der Observablen werden auch berechnet und betragen rund $\sigma(\Delta\tau_g) = 10$ ps und $\sigma(\Delta\dot{\tau}_p) = 0.0008$ ps/s.

2.1.6 Die geometrische Laufzeitdifferenz

Bevor wir die Modellierung der VLBI-Observablen genauer betrachten, gibt Tabelle 2.2 eine Übersicht über die Größenordnung und die Unsicherheiten verschiedener Teile des VLBI-Modells.

Im folgenden werden wir nur die Modellierung der Laufzeitdifferenz (*group delay*) $\Delta\tau_g$ erörtern, da die Modellierung des *phase delay* $\Delta\tau_p$ bis auf die ionosphärische Refraktion und die Mehrdeutigkeit mit derjenigen des *group delay* $\Delta\tau_g$ übereinstimmt und die Modellierung der *phase-delay rate* $\Delta\dot{\tau}_p$ aus der Modellierung des *phase delay* $\Delta\tau_p$ berechnet werden kann gemäß

$$\Delta\dot{\tau}_p = \frac{\Delta\tau_p(t + \Delta t) - \Delta\tau_p(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.9)$$

Tabelle 2.2: Maximale Grösse und heutige Unsicherheit in der Modellierung der VLBI-Messungen in mm.

Modellkomponente	Maximaler Delay	Unsicherheit
Basislinien-Geometrie		
Geometrischer Delay 0-ter Ordnung	$6 \cdot 10^9$	-
Bahnbewegung der Erde	$6 \cdot 10^5$	1
Gravitationseffekte	$2 \cdot 10^3$	2
Stationsposition		
Tektonische Bewegung	100	1
Gezeitenbewegung	500	3
Nicht-gezeitenbedingte Bewegung	50	5
Erdrotation		
UT1 und Polschwankung	$2 \cdot 10^4$	2
Nutation/Präzession	$3 \cdot 10^5$	3
Quellenstruktur	50	10
Antennenstruktur	10^4	10
Instrumentenfehler	$3 \cdot 10^5$	5
Atmosphäre		
Ionosphäre	10^3	1
Troposphäre	$2 \cdot 10^4$	20

sofern man das Zeitintervall Δt genügend klein wählt (ca. 0.1 s).

Sämtliche geometrischen Modellanteile, die VLBI mit anderen Raumverfahren gemeinsam hat, wie die Bewegung der Stationen (Plattentektonik, Gezeiten, ...), die Erdrotation und die Einflüsse der Atmosphäre, werden für alle Verfahren gemeinsam in späteren Kapiteln behandelt.

Für die rein geometrische oder Newtonsche Laufzeitdifferenz $\Delta\tau_{geo}$ zwischen den Ankunftszeiten einer Wellenfront an den beiden Teleskopen gilt die einfache Formel (siehe (2.2))

$$\Delta\tau_{geo} = -\frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{k} \quad (2.10)$$

mit dem Basislinienvektor $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ und dem Einheitsvektor \mathbf{k} in Richtung der beobachteten unendlich weit entfernt gedachten Radioquelle. Um die hohe Genauig-

keit der VLBI-Messungen jedoch voll auszuschöpfen, müssen viele zusätzliche Terme berücksichtigt werden, die die Bewegung der Basislinie in Raum und Zeit beschreiben. Dazu gehören auch Effekte der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie.

2.1.7 Laufzeitdifferenz im baryzentrischen Koordinatensystem

Um die Beobachtungsgleichung korrekt aufzustellen, müssen wir sie zuerst in einem Inertialsystem formulieren. Eine gute Approximation eines Inertialsystems ist durch das baryzentrische System gegeben, das seinen Ursprung im Schwerpunkt des Sonnensystems hat. Unter der Annahme, dass die beobachtete Radioquelle unendlich weit entfernt ist und dass das Signal zuerst Antenne 1 erreicht ($t_2 > t_1$), lautet die Laufzeitdifferenz $\Delta\tau$ im *baryzentrischen* Koordinatensystem:

$$\Delta\tau = t_2 - t_1 = -\frac{\mathbf{k}}{c} \cdot (\mathbf{R}_2(t_2) - \mathbf{R}_1(t_1)) \quad (2.11)$$

Damit wir auch die Position der zweiten Station auf den Zeitpunkt t_1 beziehen können, entwickeln wir $\mathbf{R}_2(t_2)$ in eine Taylorreihe um den Zeitpunkt t_1 :

$$\mathbf{R}_2(t_2) = \mathbf{R}_2(t_1) + \dot{\mathbf{R}}_2(t_1) \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{R}}_2(t_1) \cdot (t_2 - t_1)^2 + \dots \quad (2.12)$$

Dabei sind $\dot{\mathbf{R}}_2(t_1)$ und $\ddot{\mathbf{R}}_2(t_1)$ die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Antenne 2 zum Zeitpunkt t_1 . Anhand der groben Abschätzung (Ω : Winkelgeschwindigkeit der Erde; R_e : Radius der Erde)

$$\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{R}}_2(t_1) \cdot (t_2 - t_1)^2 \approx \frac{1}{2} \Omega^2 R_e \frac{R_e^2}{c^2} \approx \frac{1}{2} (7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot \frac{(6.4 \cdot 10^6)^3}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ m} \approx 10^{-5} \text{ m} \quad (2.13)$$

kann man sehen, dass der quadratische Term (Beschleunigung) vernachlässigt werden kann. Es gilt also

$$\Delta\tau = -\frac{\mathbf{k}}{c} \cdot \left(\mathbf{R}_2(t_1) + \dot{\mathbf{R}}_2(t_1) \Delta\tau - \mathbf{R}_1(t_1) \right) \quad (2.14)$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach $\Delta\tau$ ergibt

$$\Delta\tau = \frac{-\frac{\mathbf{k}}{c} \cdot (\mathbf{R}_2(t_1) - \mathbf{R}_1(t_1))}{1 + \frac{\mathbf{k}}{c} \cdot \dot{\mathbf{R}}_2(t_1)} \quad (2.15)$$

Den Nenner kann man mit Hilfe der Entwicklung $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - O(x^3)$ umformen und man erhält mit der Bezeichnung $\mathbf{B} = \mathbf{R}_2(t_1) - \mathbf{R}_1(t_1)$ für die Basislinie im baryzentrischen System:

$$\Delta\tau = -\frac{1}{c} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \left(1 - \frac{1}{c} (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_2) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{R}}_2)^2 \right) \quad (2.16)$$

2.1.8 Aberration

Da die eigentlichen Messungen auf der bewegten Erde erfolgen, müssen wir die Basislinie \mathbf{B} vom unbewegten baryzentrischen System in das bewegte geozentrische System transformieren. Wegen der Rotation der Erde und der Bewegung der Erde um die Sonne ergeben sich dabei tägliche und jährliche Aberrationsterme. Die Umrechnung in ein bewegtes System muss wegen der erforderlichen Genauigkeit mit den Formeln der Speziellen Relativitätstheorie, d.h. mit einer sogenannten *Lorentztransformation* erfolgen. Die Geschwindigkeit des geozentrischen Systems gegenüber dem baryzentrischen sei durch \mathbf{v} gegeben (im baryzentr. System). Die Gesamtgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}}_2$ der Antenne 2 setzt sich damit aus der Geschwindigkeit \mathbf{v} des Geozentrums und der Erdrotationsgeschwindigkeit \mathbf{v}_2 der Antenne 2 gegenüber dem Geozentrum zusammen:

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2 \quad (2.17)$$

Die exakte Durchführung der Lorentztransformation würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Es soll deshalb nur das Resultat wiedergegeben werden:

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})}{2c^2} \mathbf{v} \quad (2.18)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ die Basislinie im geozentrischen System.

Setzt man (2.18) in (2.16) ein, so erhält man schliesslich unter Vernachlässigung sämtlicher Terme, die kleiner als 1 ps sind:

$$\begin{aligned} \Delta\tau = & \Delta\tau_{geo} \left(1 - \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{k}}{c} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k})}{c^2} \right) + \\ & + \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k})}{c^3} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})}{2c^3} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der geometrische Delay $\Delta\tau_{geo}$ wurde in (2.10) definiert. Die Terme mit $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})$ beschreiben die *jährliche Aberration*, während alle Terme mit $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k})$ dem Einfluss der *täglichen Aberration* entsprechen.

2.1.9 Relativistische Effekte

Die bisher in *baryzentrischer Koordinatenzeit* ausgedrückte Laufzeitdifferenz $\Delta\tau$ muss noch auf die *Eigenzeit* einer Atomuhr auf der Erde transformiert werden, da die gemessene Laufzeitdifferenz gleich der *Differenz der Eigenzeiten* der beiden Atomuhren an den Stationen ist. Diese Atomuhren werden jedoch von den Gravitationspotentialen der Erde, der Sonne, des Mondes und der Planeten beeinflusst.

Der Unterschied im Uhrengang zwischen Eigenzeit τ' der Uhr und Koordinatenzeit τ hängt vom Newtonschen Gravitationspotential U am Ort der Uhr und von der Geschwindigkeit \mathbf{v}_A der Atomuhr relativ zum ruhenden Schwerpunktsystem ab. Je stärker das Gravitationsfeld, desto langsamer laufen die Uhren, und bewegte Uhren laufen langsamer als ruhende Uhren. Diese zwei Effekte werden mit der folgenden Formel erfasst:

$$d\tau' \approx \left(1 - \frac{U}{c^2} - \frac{\mathbf{v}_A^2}{2c^2} \right) d\tau \quad (2.20)$$

Die Berücksichtigung dieser Terme führt zur Korrektur der Laufzeitdifferenz $\Delta\tau$ um

$$\delta\Delta\tau_{clock} = -\Delta\tau_{geo} \left(\frac{U}{c^2} + \frac{\mathbf{v}_A^2}{2c^2} \right) \quad (2.21)$$

Dazu kommen weitere Korrekturen, die wir hier nicht im Detail erörtern wollen (z.B. Synchronisation der Uhren im geozentrischen und nicht im baryzentrischen System). Insgesamt erhält man (wieder unter Berücksichtigung aller Terme, die grösser als 1 ps sind):

$$\begin{aligned} \Delta\tau' = \Delta\tau_{geo} & \left(1 - \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{k}}{c} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k})}{c^2} - \frac{U + \mathbf{v}^2/2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)}{c^2} \right) \\ & + \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{k})}{c^3} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})}{2c^3} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})}{c^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit den zu berechnenden Grössen \mathbf{k} (Richtung zum Quasar), \mathbf{b} (Basislinienvektor im geozentrischen System), \mathbf{v} (Geschwindigkeit des Erdmittelpunktes im baryzentrischen System), \mathbf{v}_2 (Geschwindigkeit der Station 2 aufgrund der Erdrotation) und U (Potential am Ort einer der beiden Uhren).

Die Richtung zur Radioquelle \mathbf{k} kann sehr einfach mit Hilfe der Rektaszension α und Deklination δ der Quelle im baryzentrischen System berechnet werden:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Der Basislinienvektor $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ im geozentrischen raumfesten System (macht die Bewegung des Erdschwerpunkts im Raum mit, nicht aber die Erdrotation) wird dabei berechnet aus den geozentrischen raumfesten Stationsvektoren \mathbf{r}_i ($i=1,2$). Für die Transformation der zwei Stationsvektoren vom erdfesten ins raumfeste System gilt weiter:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{PNUXY} \mathbf{r}_{i,e} \quad (2.24)$$

mit

$\mathbf{r}_{i,e}$ Position der Station i im erdfesten System

\mathbf{P}, \mathbf{N} Präzessions- und Nutationsmatrix

\mathbf{U} Rotationsmatrix mit der Sternzeit als Argument

\mathbf{X}, \mathbf{Y} Polschwankung (Rotationsmatrizen).

Die Positionen $\mathbf{r}_{i,e}$ der Stationen im erdfesten System müssen schliesslich noch vor der Transformation mit den folgenden zeitabhängigen Korrekturen versehen werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,e}(t) = \mathbf{r}_{i,e}(t_0) & + \mathbf{v}_{i,e} \cdot (t - t_0) + \Delta\mathbf{r}_{i,sol} + \Delta\mathbf{r}_{i,pol} \\ & + \Delta\mathbf{r}_{i,ocn} + \Delta\mathbf{r}_{i,atm} + \Delta\mathbf{r}_{i,ant} \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei

$\mathbf{r}_{i,e}(t_0)$	Empfängerposition im erdfesten System zur Referenzepoche t_0
$\mathbf{v}_{i,e}$	Empfängergeschwindigkeit im erdfesten System (Plattenbewegung)
$\Delta\mathbf{r}_{i,ocn}, \Delta\mathbf{r}_{i,atm}$	Auflasteffekte der Ozeane und der Atmosphäre (engl.: ocean and atmospheric loading)
$\Delta\mathbf{r}_{i,sol}, \Delta\mathbf{r}_{i,pol}$	Feste Erdgezeiten und Polgezeiten
$\Delta\mathbf{r}_{i,ant}$	Variationen des Antennenphasenzentrums, Deformation der Antenne

Alle Grössen und Terme der Gleichungen (2.24) und (2.25) (mit Ausnahme der Antennenkorrektur) werden in späteren Kapiteln behandelt werden, da sie für alle geodätischen Raumverfahren wichtig sind.

An der Laufzeitdifferenz $\Delta\tau'$ selbst müssen ebenfalls relativistische Korrekturen angebracht werden. Die Allgemeine Relativitätstheorie sagt ja aus, dass ein Signal verlangsamt wird, wenn es sich durch ein Gravitationsfeld bewegt. Der entsprechende Korrekturterm für diese Verlangsamung lautet (wieder unter der Annahme, dass das Signal Antenne 1 zuerst erreicht):

$$\delta\Delta\tau_{grav} = \frac{R_g}{c} \ln \left(\frac{|\mathbf{R}_1| + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{R}_2| + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{k}} \right) \quad (2.26)$$

Dabei ist R_g der sogenannte *Schwarzschildradius* des Körpers mit der Masse M , der das Gravitationsfeld verursacht:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.27)$$

Natürlich ist diese Verzögerung nur relevant, wenn sich das Signal sehr nahe am Körper vorbeibewegt. Bei der Sonne beträgt die Verzögerung maximal etwa 200 ns für extrem nahe Vorbeigänge. Auch bei Quasarbeobachtungen in der unmittelbaren Nähe eines Planeten muss diese Verzögerung berücksichtigt werden.

Schliesslich wird das Signal auch im Gravitationsfeld der Erde verzögert. Dies wird mit der folgenden Korrektur erfasst, die sich leicht aus der allgemeineren Gleichung (2.26) herleiten lässt ($|\mathbf{R}_1| \approx |\mathbf{R}_2|$):

$$\delta\Delta\tau_{grav,E} = \frac{2GM_E}{c^3} \ln \left(\frac{1 + \sin E_1}{1 + \sin E_2} \right) \quad (2.28)$$

wobei M_E die Erdmasse bedeutet, und E_1 und E_2 die Elevationswinkel bezeichnen, unter denen man die Quelle von den beiden Stationen aus sieht. Dieser Effekt kann maximal 21 ps betragen.

2.1.10 Instrumentelle Einflüsse

Unter den instrumentellen Einflüssen verstehen wir alle Effekte, die durch die Radioteleskope, die Empfänger, die Signalverarbeitung und die Aufzeichnungsgeräte verursacht werden. Dazu gehören:

- Verhalten des Frequenznormals: die zwei Uhren an den zwei Teleskopen laufen unabhängig voneinander und können nur ungefähr synchronisiert werden (z.B. mit GPS auf etwa $1 \mu\text{s}$). Daher muss eine Korrektur für die Stationsuhr bestimmt werden, meist in Form eines Polynoms:

$$\delta\Delta\tau_{clk}(t) = \Delta\tau'_0 + \Delta\tau'_1(t - t_0) + \frac{1}{2}\Delta\tau'_2(t - t_0)^2 \quad (2.29)$$

Die Koeffizienten $\Delta\tau'_i$ ($i=0,1,2$) werden zusammen mit den anderen geodätischen Parametern (Koordinaten, Erdrotation, ...) aus den VLBI-Messungen bestimmt.

- Deformation des Radioteleskops (siehe $\Delta\mathbf{r}_{i,ant}$ in (2.25)) und damit eine Verschiebung des Achsenschnittpunktes, der gewöhnlich als Referenzpunkt dient. Solche Deformationen können durch eine Vielzahl von Ursachen zustande kommen (Temperaturausdehnung, Schnee, Gewichtsverlagerungen, Wind, ...).
- Eine dauernde Kalibration des gesamten Signalweges durch die elektronischen Komponenten ist notwendig. Die Qualität der Kalibration wirkt sich auf die Messgenauigkeit aus.
- Fehler bei der Korrelation der Signale.

2.2 GPS und GLONASS

In den letzten Jahren ist die Bedeutung von *Satellitensystemen* für die Geodäsie und verwandte Gebiete immer offensichtlicher geworden. Wir wollen hier zwei Systeme betrachten, die im Aufbau sehr nahe verwandt sind, nämlich das

- **NAVSTAR-GPS: NAVigation System with Time And Ranging – Global Positioning System** der US-Amerikaner und das
- **GLONASS: GLObal NAVigation Satellite System** (genauer “Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema”) der Russen.

Im Folgenden wollen wir den Systemaufbau, die Signalstruktur und die Beobachtungsgleichungen für die Messungen dieser zwei Systeme genauer betrachten.

2.2.1 Systembeschreibung

Das GPS- und das GLONASS-System können in je drei Hauptsegmente unterteilt werden:

- **Space Segment:** die Konstellation der Satelliten des Systems und die Satelliten selbst.
- **Control Segment:** Bodenstationen, Infrastruktur und Software für die Überwachung und das Betreiben des GPS- bzw. GLONASS-Systems.

- **User Segment:** alle GPS- bzw. GLONASS-Empfänger weltweit und die dazugehörige Verarbeitungssoftware.

Wir sollten diese 3 Segmente eigentlich um einen vierten, ebenso wichtigen Teil erweitern. Wir wollen diesen Teil "Ground Segment" (Bodensegment) nennen:

- **Ground Segment:** alle Permanent-Netze, die wesentliche Produkte für die Benutzer des Systems liefern. Dazu gehört das zivile, globale Netz von GPS-Empfängern des International GPS Service (IGS), das die Bestimmung von sehr genauen GPS-Bahnen und die Realisierung eines präzisen Referenzsystems erlaubt. Im Falle von GLONASS spielt diese Rolle zur Zeit das International GLONASS Service Pilot Project (IGLOS-PP). Zum "Ground Segment" gehören auch die regionalen Permanentnetze zur Verdichtung des globalen Referenzsystems (z.B. die EUREF-Stationen).

Space Segment

Beide Satellitenkonstellationen bestehen nominell aus 24 Satelliten (ursprünglich 21 + 3 Ersatzsatelliten). In Wirklichkeit stehen zurzeit (Dezember 2002)

- **28** aktive GPS-Satelliten und
- **7** aktive GLONASS-Satelliten

zur Verfügung. Sieben der aktiven GPS-Satelliten gehören zur neuesten Generation der Block IIR Satelliten. Abbildung 2.5 zeigt je ein Exemplar eines Block I, Block II und Block IIR Satelliten. Bei GLONASS ist leider nicht klar, was in Zukunft mit dem Satellitensystem geschehen wird und ob in absehbarer Zukunft an einer Vervollständigung der Konstellation gearbeitet werden wird. In Europa wird zurzeit das Galileo-System entwickelt. Dieses sollte im Jahre 2008 operationell werden.

Die Konstellation der Systeme wurde so geplant, dass zu jedem Zeitpunkt mindestens 4 Satelliten von jedem Ort der Erde aus sichtbar sind. Wie wir später in Abschnitt 2.2.4 sehen werden, braucht man mindestens 4 Satelliten, um sich in Echtzeit positionieren zu können.

Die Bahncharakteristiken der zwei Systeme sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt. Die Satelliten bewegen sich auf nahezu kreisförmigen Bahnen in einer Höhe von rund 20'200 km (GPS) bzw. 19'100 km (GLONASS) über der Erdoberfläche. Die Geschwindigkeit der Satelliten in einem raumfesten System beträgt ungefähr 4 km/s, relativ zu Stationen am Boden maximal 2.8 km/s. Die Geschwindigkeit der Erddrehung am Äquator als Vergleich beträgt ca. 0.45 km/s. Die GPS-Satelliten wiederholen ihre "ground tracks" (Bodenspuren) nach 1 Sterntag, also nach 23^h 56^m. Dies entspricht genau zwei Umläufen der Satelliten. In Sonnentagen (Weltzeit UT) gerechnet wird dieselbe Stellung der Satelliten jeden Tag jeweils um 4 Minuten früher erreicht. Aufgrund dieser Tatsache wiederholen sich Tag für Tag jegliche Fehler, die von der Satellitengeometrie abhängen, und führen zu schwierig zu detektierenden systematischen Effekten (z.B. durch Multipath). Die Bahnneigung von 55° bei GPS hat zur Folge, dass an den Polen keine Satelliten über etwa 42° Elevation gesehen werden können.

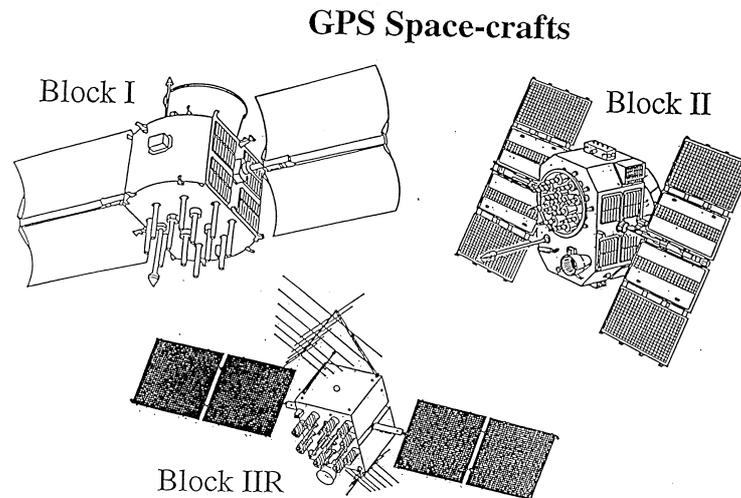


Abb. 2.5: Verschiedene Generationen von GPS-Satelliten: Block I, Block II und Block IIR.

Charakteristik	GPS	GLONASS
Grosse Halbachse	26'600 km	25'500 km
Umlaufperiode	11 h 58 min	11 h 16 min
Bahnneigung	55°	65°
Anzahl Bahnebenen	6 (60° Abstand)	3 (120° Abstand)
Anzahl Satelliten	24 (3 Reserve)	24 (3 Reserve)
Ungefähre Masse	815 kg	700 kg
Datenrate	50 bit/sec	50 bit/sec
PRN Codes ¹	Satellitenabhängig	Satellitenunabhängig
Frequenzen	Satellitenunabhängig	Satellitenabhängig

¹ Pseudo-Random Noise Codes

Tabelle 2.3: Eigenschaften der GPS- und GLONASS-Konstellation.

Die GLONASS-Satelliten wiederholen ihre “ground tracks” erst nach 8 Sterntagen, also nach 17 Umläufen. Eine identische Geometrie — jedoch mit anderen Satelliten realisiert — ergibt sich nach 1 Sterntag, wenn wirklich 8 Satelliten gleichmässig in jeder Bahnebene verteilt sind (zurzeit sind nur 7 Satelliten aktiv).

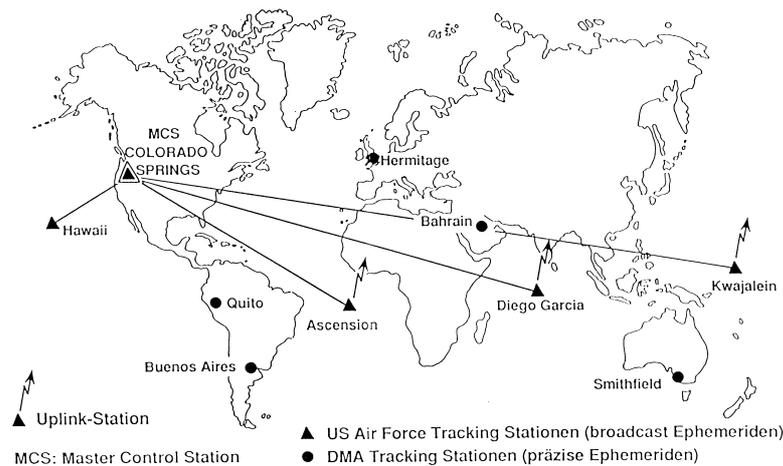


Abb. 2.6: Das Control Segment des GPS.

Die 2:1-Kommensurabilität der GPS-Umlaufzeit mit der Erdrotation führt zu Resonanzeffekten mit dem Gravitationsfeld. Die GPS-Satelliten müssen daher ziemlich oft manövriert werden. Die GLONASS-Konstellation mit Umlaufzeiten von rund $11^h 16^m$ kennt dieses Problem nicht. Als weiteren Unterschied können wir erwähnen, dass die GLONASS-Satelliten in den Polarregionen wegen der grösseren Bahnneigung besser sichtbar sind (siehe Tabelle 2.3).

Control Segment

Das Operational Control System (OCS, siehe Abb. 2.6) ist seit 1985 aktiv. Die Master Control Station in Colorado Springs ist verantwortlich für die Gesamtkontrolle, die Bestimmung und Prädiktion von Satellitenbahnen und Satellitenuhrkorrekturen. Alle dargestellten Stationen liefern GPS-Daten für die Berechnung der Satellitenbahnen und -uhren. Ascension Island, Diego Garcia und Kwajalein verfügen über Antennen (uplink), um an die Satelliten Informationen und Befehle übermitteln zu können. Über das Control Segment von GLONASS ist wenig bekannt. Die Kontrollstationen liegen offensichtlich alle in Russland. Dafür sind die Satelliten in der Lage, sich gegenseitig Informationen zukommen zu lassen.

User Segment

Das User Segment besteht aus allen GPS/GLONASS-Empfängern zu Land, zur See, in der Luft oder in einer Umlaufbahn (z.B. ein Low Earth Orbiter (LEO) Satellit mit einem GPS-Empfänger an Bord). Der Benutzerkreis von GPS (und GLONASS) ist sehr gross und äusserst vielseitig, da GPS für Navigation, Positionierung, Vermessung, Landesvermessung, Geodynamik, Geophysik, Atmosphärenphysik, Zeit- und Frequenztransfer und vieles mehr verwendet wird. Es gibt deshalb auch GPS-Empfänger in den unterschiedlichsten Preisklassen und für verschiedenste

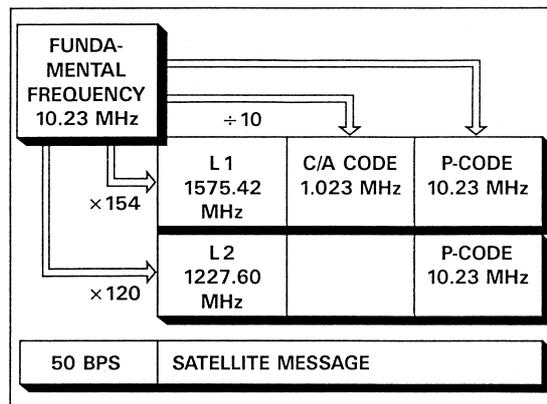


Abb. 2.8: Schema der Signal- und Frequenzerzeugung im GPS-Satelliten

(carrier signals; Sinuswellen) des GPS-Signals durch Multiplikation abgeleitet (siehe Abb. 2.8):

- L_1 : $f_1=1575.42$ MHz (= $154 \cdot 10.23$ MHz), $\lambda_1 \approx 19$ cm
- L_2 : $f_2=1227.60$ MHz (= $120 \cdot 10.23$ MHz), $\lambda_2 \approx 24$ cm

Auf die Sinuswellen (Träger) werden durch Phasenmodulation sogenannte **PRN-Codes** (pseudo random noise) aufmoduliert. Diese Codes bestehen aus kürzeren oder längeren Sequenzen von Bits (0 und 1):

- **C/A-Code** (Clear Access / Coarse Acquisition): Sequenz von 1023 Bits (chips). Er wiederholt sich nach jeweils 1 ms. Die Chip-Länge (1 Bit) beträgt 293 m. Jeder GPS-Satellit sendet seine eigene Code-Sequenz aus. Der C/A-Code wird nur auf den Träger L_1 aufmoduliert.
- **P-Code** (Protected / Precise): wiederholt sich erst nach 266.4 Tagen (rund $2.35 \cdot 10^{14}$ chips!). Die Chip-Länge beträgt 29.3 m, was genauere Messungen erlaubt als mit dem C/A-Code. Der P-Code wird sowohl auf L_1 als auch auf L_2 übermittelt.
- **Navigation Message**: Informationen für den Systembenutzer (auf L_1 und L_2 vorhanden).

Abbildung 2.9 zeigt, wie sich das Vorzeichen des Sinussignals bei einer Änderung des Codes (von 0 auf 1 oder von 1 auf 0) ändert. Die Navigation Message enthält die sogenannte **Broadcast Ephemeris**, d.h. alle Angaben, die nötig sind, um die Position des Satelliten zu berechnen (Pseudo-Keplerbahnelemente), und **Satellitenuhrkorrekturen** in Form eines Polynoms 2-ten Grades. Zusätzlich sind auch **Almanach-Daten** in der Navigation Message gespeichert (ungefähre Bahnangaben für Langzeitprognosen) sowie Information über den Zustand der **Ionosphäre** (Parameter des Klobuchar-Modells) und den **Status** (health status) der Satelliten.

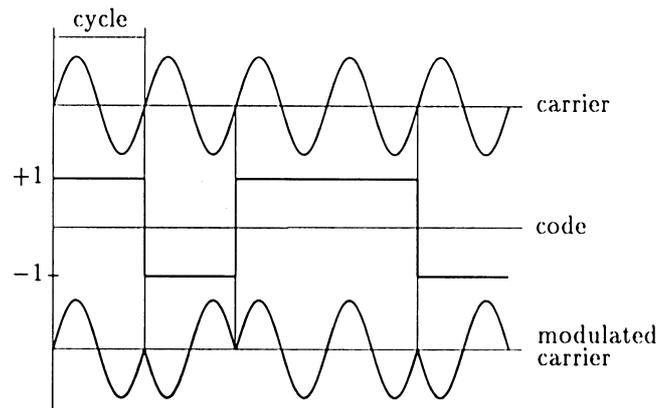


Abb. 2.9: Phasenmodulation des Trägersignals mit einer Binärsequenz [Hofmann-Wellenhof et al., 1997].

GLONASS-Signale

Auch bei GLONASS werden vom Satelliten zwei **Trägerwellen** (carrier signals) erzeugt und ausgesendet, jeder Satellit hat jedoch seine eigenen Frequenzen. Das Verfahren zum Auftrennen der Signale der einzelnen Satelliten durch den Empfänger am Boden anhand der unterschiedlichen Frequenzen heißt **FDMA** (Frequency Division Multiple Access). Im Gegensatz dazu nennt man die bei GPS zum Einsatz kommende Methode mit den unterschiedlichen Codes **CDMA** (Code Division Multiple Access).

Die beiden GLONASS-Frequenzen pro Satellit sind definiert durch:

- L_1 : $f_1 = 1602 + k \cdot 0.5625$ MHz, $\lambda_1 \approx 19$ cm
- L_2 : $f_2 = 1246 + k \cdot 0.4375$ MHz, $\lambda_2 \approx 24$ cm

wobei $k=1,2,\dots,24$ die sogenannte **Frequency Channel Number** ist. Das Verhältnis der Frequenzen ist $f_2/f_1 = 7/9$ (bei GPS: $f_2/f_1 = 60/77$).

Durch Phasenmodulation wird auch hier den Trägerwellen Bit-Information (Codes) mitgegeben:

- **C/A-Code** mit 0.511 MHz (Chip-Länge ≈ 587 m)
- **P-Code** mit 5.11 MHz (Chip-Länge ≈ 58.7 m)
- **Navigation Message**: ähnliche Informationen wie bei GPS werden übermittelt, allerdings wird die Bahninformation durch Angabe der Position und der Geschwindigkeit des Satelliten (alle 30 Minuten) und nicht durch Pseudo-Keplerelemente wie bei GPS zur Verfügung gestellt.

Dieselbe Code-Sequenz kann für alle Satelliten verwendet werden (Erkennen der Satelliten an der Frequenz und nicht an der Code-Sequenz).

Künstliche Verschlechterung der Signale

Zwei Mechanismen des US Department of Defense begrenzen die Genauigkeit, die zivilen Nutzern des GPS zur Verfügung steht:

- **Selective Availability (SA)**: Die GPS-Signale werden absichtlich verschlechtert, damit der Benutzer nur eine begrenzte Positionsgenauigkeit erreichen kann (ca. 30–100 m). Dabei gibt es zwei unterschiedliche Verfahren. Mit dem **Epsilon**-Mechanismus wird die Bahninformation in der Navigation Message fehlerhaft gemacht. Diese Form der “Degradation” scheint nicht benutzt zu werden. Sie ist zudem wirkungslos, wenn man die genauen IGS-Bahnen verwendet (präzidierte IGS-Bahnen stehen auch in Echtzeit zur Verfügung). Mit dem sogenannten **Dithering** wird dagegen die Satellitenuhr manipuliert (dauernde Frequenzänderungen gemäss einem unbekanntem Algorithmus). Dies hat zur Folge, dass man die Satellitenuhrkorrektur nicht genau kennt und bei der Berechnung der absoluten Position entsprechende Fehler auftreten. Wie sich eine Satellitenuhr unter SA verhält, sieht man in Abbildung 2.10. Die Variationen betragen bis zu $0.2 \mu\text{s}$, was 60 m entspricht. Beim relativen Positionieren (zwei oder mehr Empfänger) ist das Dithering kein Problem, da die Satellitenuhr durch Differenzbildung eliminiert werden kann. Am **2. Mai 2000** ist SA offiziell **ausgeschaltet** worden.
- **Anti-Spoofing (AS)**: Der genauere P-Code wird verschlüsselt durch Überlagerung des zusätzlichen W-Codes (P-Code + W-Code = Y-Code). Dies ist ein Schutzmechanismus, damit nicht irgend jemand vorgetäuschte GPS-Signale aussenden kann, die dann von einem Empfänger fälschlicherweise zur Berechnung seiner Position verwendet würden. Moderne GPS-Empfänger können trotz des Y-Codes präzise Code-Messungen (beinahe von der Qualität des P-Codes) auf beiden Frequenzen vornehmen. Eine Folge von AS ist jedoch ein stärkeres Rauschen der Code-Messungen und insbesondere der L_2 -Phasenmessungen.
- Bei GLONASS gibt es keine Signalverschlechterung durch SA oder AS.

2.2.3 GPS-Zeit

Im Zusammenhang mit GPS (und GLONASS) sind die folgenden Zeitsysteme wichtig (siehe auch Abb. 2.11):

- **TAI** (Temps Atomique International) wird definiert durch ein Ensemble von Atomuhren.
- **UT1** (Universal Time 1) wird abgeleitet aus der Rotation der Erde (Erdrotation als Uhr) und zeigt daher einen ungleichmässigen Verlauf.
- **UTC** (Universal Time Coordinated) unterscheidet sich von TAI nur durch eine ganze Anzahl Schaltsekunden. UTC wird durch das Einfügen von Schaltsekunden immer wieder an UT1 angepasst: $|UT1 - UTC| < 0.9 \text{ sec}$.

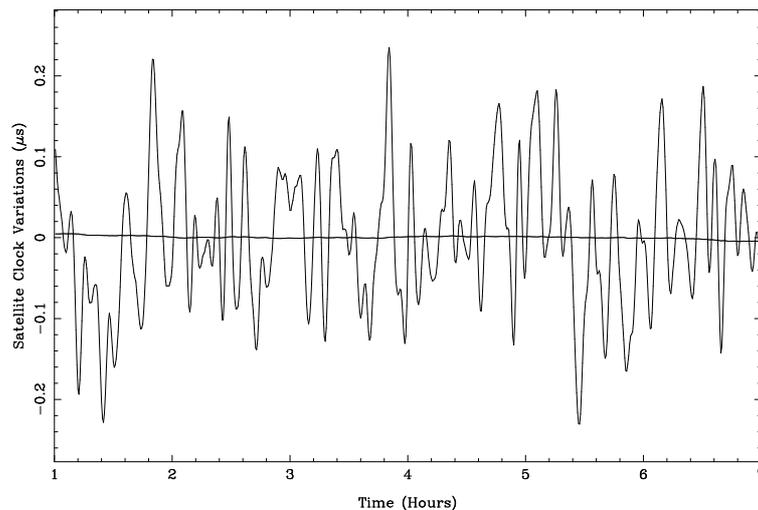


Abb. 2.10: Satellitenuhrkorrekturen unter Selective Availability für PRN 15, Tag 307, 1998.

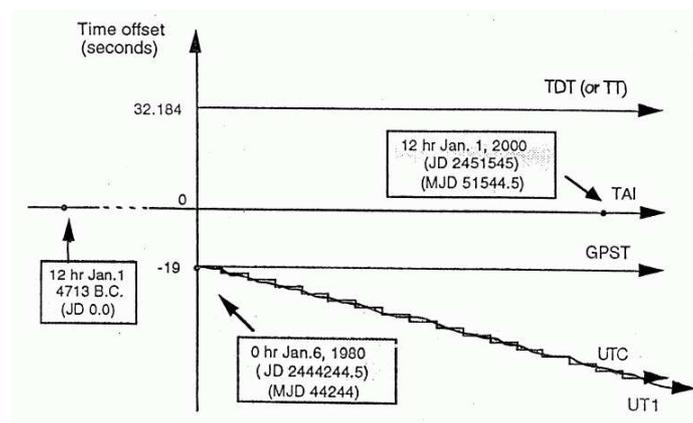


Abb. 2.11: Zeitsysteme

- **GPS-Zeit** wird an TAI angepasst. Der Unterschied **TAI-GPS=19 sec** ist konstant.

Die GPS-Zeit wird oft in **GPS-Wochen** (Beginn 06.01.1980) und **GPS-Sekunden** (seit Beginn der Woche) gezählt. Die Woche beginnt jeweils am Sonntag 00:00 Uhr mit Tag 0. Am Sonntag, dem 5. Januar 2003 begann beispielsweise GPS-Woche 1200. Der Unterschied zwischen GPS und UTC beträgt immer ein ganze Anzahl Sekunden. Zurzeit gilt $\text{GPS-UTC}=13 \text{ sec}$.

- **GLONASS-Zeit** bezieht sich auf UTC (Moskau), was bei Schaltsekunden zu Problemen führen könnte.

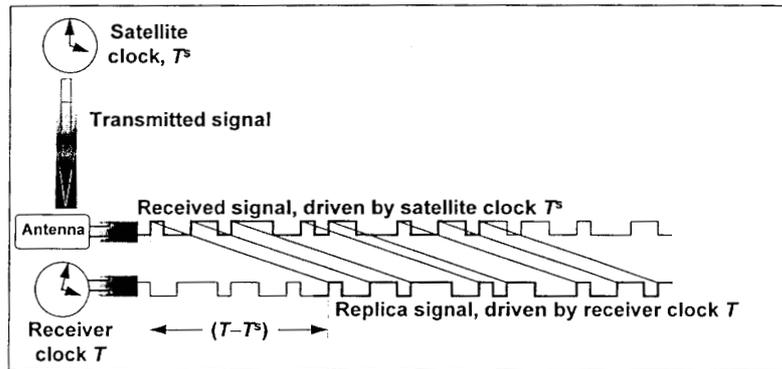


Abb. 2.12: Pseudorange-Messung: Vergleich des Satellitensignals und der Kopie des Empfängers [Blewitt, 1997].

2.2.4 Beobachtungsgleichungen

Pseudorange- oder Code-Messung

Der Empfänger erzeugt eine eigene Kopie desjenigen Signals, das vom Satelliten ausgesandt wird. Durch Verschieben dieses eigenen Signals gegenüber dem Signal des Satelliten (siehe Abb. 2.12) lässt sich der Zeitunterschied zwischen Aussenden und Empfangen des Signals und damit die sogenannte Pseudorange ermitteln. Die Pseudorange-Messung ist keine eigentliche Distanz- oder Laufzeitmessung, da sie noch die Fehler der Satelliten- und Empfängeruhr enthält. Für die **Pseudorange-Messung** P_E^S gilt folglich:

$$P_E^S = c(T_E - T^S) \quad (2.30)$$

Die Empfängeruhr zeigt die Zeit T_E an, als das Signal (eine bestimmte Code-Sequenz) empfangen wird (T_E in Empfängerzeit). Die Satellitenuhr hat T^S angezeigt, als dieses Signal ausgesendet wurde (T^S in Satellitenzeit). c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Wegen des Satelliten- und Empfängeruhrfehlers folgt

$$\begin{aligned} P_E^S &= c(T_E - T^S) \\ &= c(t_E + \delta t_E - t^S - \delta t^S) \\ &= c(t_E - t^S) + c\delta t_E - c\delta t^S \\ &= \rho_E^S + c\delta t_E - c\delta t^S \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei

t_E, t^S	Empfangs- bzw. Sendezeit in GPS-Zeit
$\delta t_E, \delta t^S$	Empfänger- bzw. Satellitenuhrfehler
ρ_E^S	Distanz zwischen Empfänger und Satellit

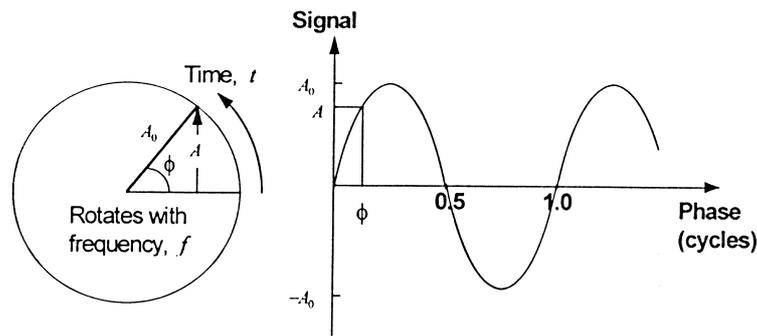


Abb. 2.13: Illustration zur Phasenmessung [Blewitt, 1997].

Dies ist ein sehr vereinfachtes Modell, da wir weder atmosphärische noch andere Einflüsse berücksichtigt haben.

Die Distanz ρ_E^S lässt sich schreiben als

$$\rho_E^S = \sqrt{(X^S - X_E)^2 + (Y^S - Y_E)^2 + (Z^S - Z_E)^2} \quad (2.32)$$

Mit Hilfe der Navigation Message können wir die Satellitenposition (X^S, Y^S, Z^S) und den Satellitenuhrfehler δt^S berechnen. Es bleiben also 4 Unbekannte übrig, nämlich die Empfängerposition (X_E, Y_E, Z_E) und der Empfängeruhrfehler δt_E .

Die eigentliche Pseudorange-Messgenauigkeit für den C/A-Code beträgt dabei rund **10 m**, für den P-Code etwa **1 m**.

Wenn Code-Messungen zu **4 Satelliten** vorhanden sind, kann das Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten gelöst werden. Falls Pseudoranges zu mehr als 4 Satelliten gemessen wurden oder mehrere Messepochen zusammengefasst werden, um die Position zu bestimmen, dann kommt die **Ausgleichsrechnung** (Methode der kleinsten Quadrate) zum Zuge. Wenn in der Rechnung genaue Satellitenbahnen und Satellitenuhrkorrekturen (z.B. vom IGS) verwendet werden, kann man mit Code-Messungen eine Positionsgenauigkeit im **1m-Bereich** erreichen.

Trägerphasenmessung

Die Phase Φ (in Zyklen) wächst linear mit der Zeit t (siehe Abb. 2.13 links):

$$\Phi = f \cdot t + \Phi_0 \quad (2.33)$$

Dabei ist f die Frequenz und Φ_0 die unbekannte Phasenlage zum Zeitpunkt $t = 0$.

Der Satellit erzeugt mit seiner Uhr das Phasensignal Φ^S . Zum Aussendezeitpunkt T^S (in Satellitenzeit) gilt deshalb

$$\Phi^S = f \cdot T^S + \alpha^S \quad (2.34)$$

mit dem Instrumentenfehler α^S für den Satelliten S (Generierung des Signals im Satelliten, elektronische Verzögerungen, ...). Dieses Phasensignal läuft vom Satelliten

zum Empfänger, aber der Empfänger kennt die **Anzahl ganzer Wellenlängen** N_E^S (Ambiguity oder Mehrdeutigkeit) nicht, wenn das Signal bei ihm ankommt:

$$\Phi_E^S = \Phi^S - N_E^S = f \cdot T^S + \alpha^S - N_E^S \quad (2.35)$$

Der Empfänger erzeugt mit Hilfe seiner Uhr zudem eine eigene Referenzphase. Zum Zeitpunkt T_E (in Empfängerzeit), wenn das Satellitenphasensignal Φ_E^S beim Empfänger ankommt, gilt:

$$\Phi_E = f \cdot T_E + \alpha_E \quad (2.36)$$

Dabei ist α_E ein Instrumentenfehler beim Empfänger E (Verzögerungen in Kabeln und Elektronik etc.). Die eigentliche **Phasenmessung**, die Differenz zwischen der Referenzphase des Empfängers und der Satellitenphase, kann dann dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \phi_E^S &= \Phi_E - \Phi_E^S \\ &= (f \cdot T_E + \alpha_E) - (f \cdot T^S + \alpha^S - N_E^S) \\ &= f \cdot (T_E - T^S) + (N_E^S + \alpha_E - \alpha^S) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Multiplikation mit der Wellenlänge $\lambda = c/f$ ergibt schliesslich die **Phasenbeobachtungsgleichung** in Längeneinheiten (in Metern statt in Cycles):

$$\begin{aligned} L_E^S &= \lambda \phi_E^S \\ &= c(T_E - T^S) + \lambda(N_E^S + \alpha_E - \alpha^S) \\ &= c(T_E - T^S) + \lambda b_E^S \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit dem Ambiguity-Term

$$b_E^S = N_E^S + \alpha_E - \alpha^S \quad (2.39)$$

Man beachte, dass der Ambiguity-Term (oder *phase bias*) b_E^S wegen der Instrumentenfehler α_E und α^S nicht ganzzahlig ist. Nur N_E^S ist ganzzahlig. Unter Verwendung der Pseudorange-Gleichung (2.31) folgt aus (2.38):

$$L_E^S = \rho_E^S + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda b_E^S \quad (2.40)$$

Der einzige Unterschied zur Pseudorange-Messung (2.31) besteht im Term λb_E^S , in dem die **ganzzahlige Mehrdeutigkeit** N_E^S steckt.

Die Genauigkeit der Phasenmessungen beträgt 1-2 mm, womit die Phasenmessung rund 1000 mal genauer ist als die Code-Messung.

Wenn der Empfänger das Satellitensignal verliert (loss of lock), z.B. wegen Abschattungen oder starker Ionosphärenaktivität, dann kann er die ankommenden Wellenzüge nicht mehr kontinuierlich zählen und es kommt zu einem Sprung in den Phasenmessungen von einer ganzen Anzahl Wellenlängen, zu einem sogenannten **Cycle Slip**. In der Datenvorverarbeitung werden diese Sprünge nach Möglichkeit korrigiert (cycle slip fixing).

Verbessertes Beobachtungsmodell

Bisher wurden weder die Verzögerungen der Signale in der Troposphäre und der Ionosphäre noch relativistische Korrekturen und Messfehler in der Beobachtungsgleichung berücksichtigt. Um wirklich hochgenaue GPS-Resultate zu erzielen, müssen noch viele Modellierungsdetails in die Beobachtungsgleichung einfließen.

Schauen wir uns nochmals die Beobachtungsgleichung (2.40) für die Phasenmessungen an. Der Term

$$\rho_E^S = c(t_E - t^S) = c\tau_E^S \quad (2.41)$$

mit der Lichtlaufzeit τ_E^S enthält neben der geometrischen Distanz zwischen Satellit und Empfänger alle Effekte, die die Signalausbreitung vom Satelliten zum Empfänger beeinflussen. Wir müssen diesen Term daher folgendermassen erweitern und ergänzen:

$$\rho_E^S = c\tau_E^S = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)| + \delta\rho_{trp} + \delta\rho_{ion} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{mul} \quad (2.42)$$

wobei

- $\mathbf{r}_E(t_E)$ Empfängerposition zur Empfangszeit t_E (GPS-Zeit)
- $\mathbf{r}^S(t^S) = \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)$: Satellitenposition zur Sendezeit t^S (GPS-Zeit)
- $\delta\rho_{trp}$ Signalverzögerung in der Troposphäre
- $\delta\rho_{ion}$ Signalverzögerung in der Ionosphäre
- $\delta\rho_{rel}$ Relativistische Korrektur
- $\delta\rho_{mul}$ Einfluss der Mehrwegeausbreitung (multipath)

Zu beachten ist, dass die Lichtlaufzeit τ_E^S auf beiden Seiten der Gleichung (2.42) vorkommt. Man muss also z.B. über Gleichung (2.42) iterieren oder die Distanz $|\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)|$ um den Zeitpunkt t_E in eine Reihe entwickeln (typischerweise bis zur 2. Ordnung) und die resultierende Gleichung nach τ_E^S auflösen.

Fügen wir noch den Messfehler ϵ_E^S der Phasenbeobachtung hinzu, so erhalten wir insgesamt für die **Phasenbeobachtungsgleichung**:

$$L_E^S = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)| + \delta\rho_{trp} + \delta\rho_{ion} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{mul} + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda(N_E^S + \alpha_E - \alpha^S) + \epsilon_E^S \quad (2.43)$$

Wir wollen den geometrischen Term, also die rein geometrische Distanz

$$r_E^S = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)| \quad (2.44)$$

noch genauer diskutieren. Die Positionen des Satelliten S und des Empfängers E seien im *raumfesten geozentrischen System* (z.B. J2000.0) gegeben. (Die Wahl eines anderen Bezugssystems wäre prinzipiell auch möglich.) Für die Satellitenposition \mathbf{r}^S gilt (zum Zeitpunkt $t_E - \tau_E^S$):

$$\mathbf{r}^S = \mathbf{r}_0^S + \Delta\mathbf{r}_{ant}^S \quad (2.45)$$

wobei

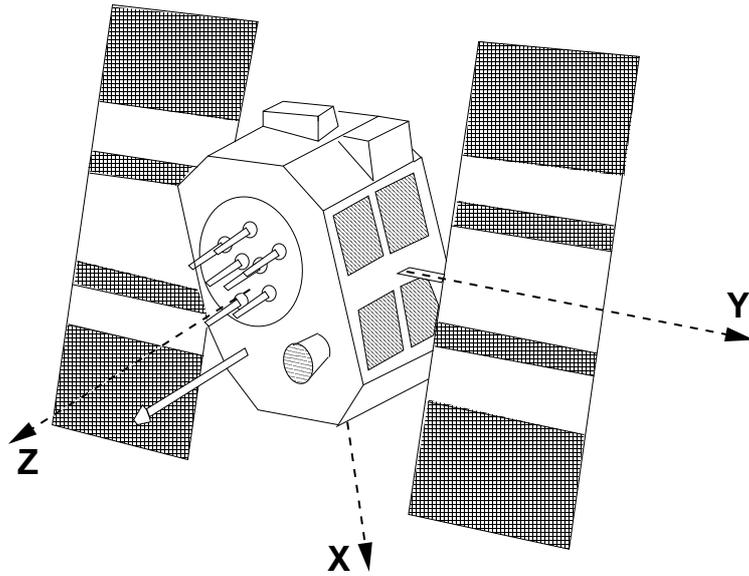


Abb. 2.14: Definition des satelliten-spezifischen Koordinatensystems.

- \mathbf{r}_0^S Massenschwerpunkt des Satelliten
- $\Delta\mathbf{r}_{ant}^S$ Differenz zwischen dem Antennenphasenzentrum und dem Massenschwerpunkt \mathbf{r}_0^S des Satelliten

Im IGS werden die folgenden Antennen-Offsets $\Delta\mathbf{r}_{ant}^S$ verwendet:

Satelliten-typ	Antennen-Offset $\Delta\mathbf{r}_{ant}^S$		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
Block I	0.2100	0.0000	0.8540
Block II	0.2794	0.0000	1.0230
Block IIA	0.2794	0.0000	1.0230
Block IIR	0.0000	0.0000	0.0000

Die Werte in X, Y, Z beziehen sich auf das in Abbildung 2.14 dargestellte satelliten-spezifische Koordinatensystem. In den IGS Precise Orbit Files sind übrigens für die Satelliten die Positionen des Massenschwerpunktes und nicht die des Antennenphasenzentrums gegeben.

Die Empfängerposition \mathbf{r}_E (zur Zeit t_E) erhält man aus den erdfesten Koordinaten des Empfängers $\mathbf{r}_{E,e}$ genau gleich wie bei VLBI (vgl. Gleichung (2.24)):

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{PNUXY} \mathbf{r}_{E,e} \tag{2.46}$$

Und wie bei VLBI muss die Position $\mathbf{r}_{E,e}$ des Empfängers im erdfesten System vorher mit allen in (2.25) aufgezählten zeitabhängigen Korrekturen versehen werden.

2.2.5 Relativistische Korrekturen

Die Uhr im GPS-Satelliten wird sowohl durch allgemein- (Gravitationsfeld der Erde) als auch durch speziell-relativistische Effekte (Relativgeschwindigkeit des Satelliten) beeinflusst. Aufgrund des schwächeren Gravitationsfeldes in der Höhe der GPS-Satelliten laufen die Satellitenuhren um etwa $40 \mu\text{s}/\text{Tag}$ schneller als Uhren auf der Erde. Zusätzlich laufen bewegte Uhren langsamer als unbewegte (Spezielle Relativitätstheorie). Beide Effekte werden in Gleichung (2.20) zusammengefasst. Für den Frequenzunterschied $\Delta f = f - f_0$ gilt also:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\Delta U}{c^2} \quad (2.47)$$

mit

f_0 vom Empfänger empfangene Frequenz

f vom Satelliten ausgesendete Frequenz

v Geschwindigkeit des Satelliten im raumfesten System (rund 4 km/s)

ΔU Potentialdifferenz zwischen Satellit und Empfänger

Nehmen wir eine kreisförmige Bahn und eine kugelförmige Erde (Erdmasse M_E) an, so gilt näherungsweise:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r^S} - \frac{1}{r_E} \right) \quad (2.48)$$

Einsetzen von numerischen Werten liefert

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -4.464 \cdot 10^{-10} \quad (2.49)$$

Damit der Empfänger am Boden trotz der relativistischen Effekte die nominale Frequenz von 10.23 MHz empfangen kann, wird die von der Satellitenuhr erzeugte Frequenz vor dem Aussenden künstlich um $\Delta f = -4.464 \cdot 10^{-10} f_0 = -4.57 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ auf $10.22999999543 \text{ MHz}$ verschoben.

Mit dieser Frequenzverschiebung wird lediglich ein konstanter Uhrengang korrigiert. Weil die GPS-Bahnen nicht exakt kreisförmig sind, treten in der Frequenz periodische Variationen auf, die zu folgender Distanzkorrektur führen:

$$\delta\rho_{rel,1} = \frac{2}{c} \sqrt{GM_E a} e \sin E \quad (2.50)$$

Dabei bezeichnet e die numerische Exzentrizität, a die grosse Halbachse und E die exzentrische Anomalie der Satellitenbahn. Diese Distanzkorrektur kann mehr als 10 m betragen.

Auch bei GPS wird das Signal auf dem Weg durch das Gravitationsfeld der Erde verzögert. Analog zu Formel (2.26) gilt hier für die Distanzkorrektur:

$$\delta\rho_{rel,2} = \frac{2GM_E}{c^2} \ln\left(\frac{r^S + r_E + \rho_E^S}{r^S + r_E - \rho_E^S}\right) \quad (2.51)$$

Der gesamte Korrekturterm $\delta\rho_{rel}$ in der Beobachtungsgleichung (2.43) lautet folglich

$$\delta\rho_{rel} = \delta\rho_{rel,1} + \delta\rho_{rel,2} \quad (2.52)$$

wobei der zweite Term maximal 18.7 mm betragen kann. Beim relativen Positionieren (Basislinien) ist die Korrektur aufgrund dieses zweiten Terms höchstens 1 ppb (10^{-9}).

2.2.6 Differenzenbildung und Linearkombinationen

Doppelte Differenzen

Oft werden GPS-Daten für hochgenaue Anwendungen in Form von sogenannten *Doppeldifferenzen* (Double-Differences) verarbeitet, also der Differenz der Beobachtungen (siehe (2.40)) zweier Stationen (A und B) und zweier Satelliten (j und k), um die Empfängeruhr- und Satellitenuhrfehler zu eliminieren:

$$\begin{aligned} \nabla\Delta L_{AB}^{jk} &= (L_A^j - L_B^j) - (L_A^k - L_B^k) \\ &= +\rho_A^j + c\delta t_A - c\delta t^j + \delta\rho_A^j + \lambda b_A^j \\ &\quad -\rho_B^j - c\delta t_B + c\delta t^j - \delta\rho_B^j - \lambda b_B^j \\ &\quad -\rho_A^k - c\delta t_A + c\delta t^k - \delta\rho_A^k - \lambda b_A^k \\ &\quad +\rho_B^k + c\delta t_B - c\delta t^k + \delta\rho_B^k + \lambda b_B^k \\ &= \nabla\Delta\rho_{AB}^{jk} + \nabla\Delta\delta\rho_{AB}^{jk} + \nabla\Delta b_{AB}^{jk} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dabei sollen die Terme $\delta\rho_A^j$ etc. alle Korrekturgrößen, die in Gleichung (2.42) enthalten sind, zusammenfassen.

Folgende Bemerkungen sind hier angebracht:

- Obschon die Empfängeruhrfehler vollständig eliminiert werden (da beide Satelliten j und k exakt zur selben Zeit gemessen werden), müssen wir die Empfängeruhrfehler trotzdem mit einer Genauigkeit von rund $0.3 \mu s$ kennen, um die Satellitenpositionen zur richtigen Epoche zu berechnen. Das Zeitargument in Gleichung (2.42) bezieht sich auf GPS-Zeit — sowohl die IGS- als auch die Broadcast-Bahnen sind in GPS-Zeit gegeben — und nicht auf Empfängerzeit. Wenn wir eine Satellitengeschwindigkeit von maximal 3 km/s relativ zum Empfänger annehmen, so verändert sich die Distanz Satellit-Empfänger in $0.3 \mu s$ um rund 1 mm, was etwa dem Messrauschen entspricht.
- Die Satellitenuhrfehler werden in Gleichung (2.53) nicht, wie oft fälschlicherweise angenommen, vollständig eliminiert, weil für die Satellitenuhrfehler δt^j (und δt^k) gilt:

$$\delta t^j(t_A - \tau_A^j) \neq \delta t^j(t_B - \tau_B^j) = \delta t^j(t_A - \Delta\delta t_{AB} - \tau_B^j) \quad (2.54)$$

$\Delta\delta t_{AB}$ bezeichnet dabei die Differenz der Empfängeruhrfehler der beiden Stationen. Die Empfänger müssen daher möglichst gleichzeitig messen. Der Synchronisationsfehler $\Delta\delta t_{AB}$ zwischen den zwei Empfängeruhren muss unter SA-Bedingungen kleiner als 1 Millisekunde sein, also $\Delta\delta t_{AB} < 1$ ms, da sich die Satellitenuhr durchaus in einer Minute um etwa 60 m ($0.2 \mu s$) ändern kann (siehe Abb. 2.10). Die Vernachlässigung der Änderung der Satellitenuhr innerhalb einer Millisekunde hat dann (bei eingeschaltetem SA) nur noch einen Modellierfehler der Beobachtungen von etwa 1 mm zur Folge (Größenordnung des Phasenmessrauschens). Die heutigen Empfänger sorgen automatisch dafür, dass sie ihre Messungen innerhalb von 1 Millisekunde zum korrekten Zeitpunkt in GPS-Zeit durchführen.

Für lange Basislinien sind die Lichtlaufzeiten τ_A^j und τ_B^j verschieden, unabhängig davon, ob die Empfänger gleichzeitig messen. Dieser Effekt wird in keinem der bekannten wissenschaftlichen (und kommerziellen) Softwarepakete berücksichtigt, da dies sehr schwierig ist. Da seit 2. Mai 2000 SA ausgeschaltet ist, ist dieser Effekt unproblematisch geworden.

Im Gegensatz zu den undifferenzierten Mehrdeutigkeiten b_E^S (siehe (2.39)) sind die Doppeldifferenz-Mehrdeutigkeiten (Double Difference Ambiguities) tatsächlich ganze Zahlen, da

$$\begin{aligned}
 \nabla\Delta b_{AB}^{jk} &= +\lambda(N_A^j - \alpha^j + \alpha_A) \\
 &\quad -\lambda(N_B^j - \alpha^j + \alpha_B) \\
 &\quad -\lambda(N_A^k - \alpha^k + \alpha_A) \\
 &\quad +\lambda(N_B^k - \alpha^k + \alpha_B) \\
 &= \lambda(N_A^j - N_B^j - N_A^k + N_B^k) \\
 &= \lambda\nabla\Delta N_{AB}^{jk}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Das heisst, dass die Instrumentenfehler durch die doppelte Differenzbildung ebenfalls eliminiert wurden. Dies zeigt, dass die sogenannte “*Ambiguity Resolution*” (das Festsetzen der Ambiguities $\nabla\Delta N_{AB}^{jk}$ auf die korrekte ganze Anzahl von Zyklen) nur auf der Ebene der Doppeldifferenzen möglich ist.

GLONASS: Beim Formen der Doppeldifferenzen ändert sich im Falle von GLONASS gegenüber GPS insbesondere der Ambiguity-Term $\nabla\Delta b_{AB}^{jk}$:

$$\begin{aligned}
 \nabla\Delta b_{AB}^{jk} &= +\lambda^j(N_A^j - \alpha^j + \alpha_A) \\
 &\quad -\lambda^j(N_B^j - \alpha^j + \alpha_B) \\
 &\quad -\lambda^k(N_A^k - \alpha^k + \alpha_A) \\
 &\quad +\lambda^k(N_B^k - \alpha^k + \alpha_B) \\
 &= \lambda^j(N_A^j - N_B^j) - \lambda^k(N_A^k - N_B^k) + \Delta\lambda^{jk}(\alpha_A - \alpha_B) \\
 &= \lambda^j(N_A^j - N_B^j) - \lambda^j(N_A^k - N_B^k) \\
 &\quad +(\lambda^j - \lambda^k)(N_A^k - N_B^k) + \Delta\lambda^{jk}(\alpha_A - \alpha_B) \\
 &= \lambda^j\nabla\Delta N_{AB}^{jk} + \Delta\lambda^{jk}\Delta N_{AB}^k + \Delta\lambda^{jk}(\alpha_A - \alpha_B)
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dabei ist

$$\Delta\lambda^{jk} = \lambda^j - \lambda^k \quad (2.57)$$

Der Term $\Delta\lambda^{jk} \Delta N_{AB}^k$ zerstört die Ganzzahligkeit der Doppeldifferenz-Ambiguities. Dieser Term muss also bei der ‘‘Ambiguity Resolution’’ berücksichtigt werden. $\Delta\lambda^{jk}/\lambda_0$ kann maximal ($j = 1, k = 24$) 0.008 Zyklen betragen. Die Single-Difference Ambiguity ΔN_{AB}^k lässt sich mit Code-Messungen auf etwa 200 Zyklen genau bestimmen. Der Term $\Delta\lambda^{jk} \Delta N_{AB}^k$ kann also rund $0.008 \cdot 200 = 1.6$ Zyklen betragen. Die Grösse von $\Delta\lambda^{jk} (\alpha_A - \alpha_B)$ ist nicht bekannt.

Linearkombinationen

Die allgemeine Form einer Linearkombination der Phasen- oder der Code-Messungen lautet

$$L_x = \kappa_{1,x} L_1 + \kappa_{2,x} L_2 \quad (2.58)$$

$$P_x = \kappa_{1,x} P_1 + \kappa_{2,x} P_2 \quad (2.59)$$

Zusätzlich sind natürlich auch Kombinationen aller vier Messgrössen, also Kombinationen aus Phasen- *und* Code-Messungen möglich und gebräuchlich. Linearkombinationen werden gebildet, um

- Fehlerquellen zu eliminieren oder zu reduzieren (z.B. mit der ionosphären-freien Linearkombination),
- Cycle slips zu detektieren und zu korrigieren und
- Ambiguities besser lösen zu können.

Wir werden hier auf die Linearkombinationen nicht näher eingehen. Bei der Behandlung der atmosphärischen Refraktion werden wir die ionosphären-freie und die geometrie-freie Linearkombination kurz diskutieren.

2.2.7 Instrumentelle Einflüsse

Neben den sogenannten *Mehrwegeeffekten* (Reflexion der GPS-Signale an nahen Objekten), auf die wir nicht näher eingehen wollen, sind hier vor allem die Antennenphasenzentrumsvariationen zu erwähnen. Während bei VLBI die Antenne immer auf die zu beobachtende Quelle gerichtet ist, ist bei GPS die Empfängerantenne *omnidirektional*, d.h. sie empfängt Signale aus allen Richtungen. Bei VLBI kämpft man mit den Effekten der Deformation des Radioteleskops (siehe Abschnitt 2.1.10 und $\Delta\mathbf{r}_{i,ant}$ in (2.25)), bei GPS mehr mit der Tatsache, dass sich das Empfangszentrum der Antenne je nach Einfallswinkel des Signals verändern kann.

Das Phasenzentrum einer GPS-Antenne, der eigentliche *Empfangspunkt* des Signals, ist bei jedem Antennentyp — und es gibt eine Vielzahl von verschiedenen Antennentypen — an einem unterschiedlichen Ort lokalisiert. Zudem ist das Phasenzentrum nicht fest mit der physikalischen Antenne verknüpft, sondern verändert seine Lage je

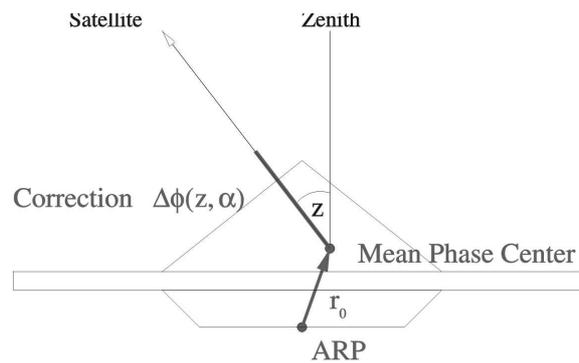


Abb. 2.15: Mittleres Antennenphasenzentrum sowie elevations- und azimutabhängige Korrekturen.

nachdem, aus welcher Richtung das GPS-Signal einfällt. Die Position des Phasenzentrums und dessen Variation sollten deshalb bei der Auswertung von GPS-Messungen möglichst genau berücksichtigt werden.

Es wird zwischen zwei Fehlereinflüssen unterschieden:

- Bei der Kombination von *verschiedenen* Antennentypen ergeben sich hauptsächlich Fehler in der Höhenkomponente. Effekte von bis zu 10 cm sind möglich, insbesondere wenn Troposphärenparameter mitbestimmt werden. Die horizontale Position ist weniger betroffen (maximal einige Millimeter). Deshalb werden bei hochgenauen Anwendungen möglichst identische Antennentypen verwendet, die mit Hilfe von Nordmarkierungen zudem gleich ausgerichtet werden. Falls dies nicht machbar ist, werden Korrekturen für die einzelnen Antennen berücksichtigt.
- Bei langen Basislinien treten auch mit *demselben* Antennentyp Fehler auf, da die Stationen denselben Satelliten unter verschiedenen Elevationswinkeln beobachten. Der Haupteffekt liegt hier in der Länge der bestimmten Basislinien. Eine Basislinien-Skalierung von 16 ppb (entspricht 10 cm Höhenänderung im globalen Netz) ist durchaus möglich.

Ein *Satz von Korrekturen* für das Antennenphasenzentrum ist gegeben durch (siehe Abb. 2.15)

- einen *mittleren Offset* r_0 des Phasenzentrums, d.h. durch den Vektor von einem physikalischen Punkt der Antenne (antenna reference point ARP) zur Position des mittleren Phasenzentrums (gemittelt über einen bestimmten Elevationsbereich) und durch
- *elevations- (und azimut-)abhängige Phasenzentrumskorrekturen* $\Delta\phi(z, \alpha)$ gegenüber dem mittleren Phasenzentrum r_0 .

Die Distanzkorrektur $\delta\rho_{ant}$ ist dann zu berechnen nach

$$\delta\rho_{ant}(\alpha, z) = -(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e} + \Delta\phi(\alpha, z)) \quad (2.60)$$

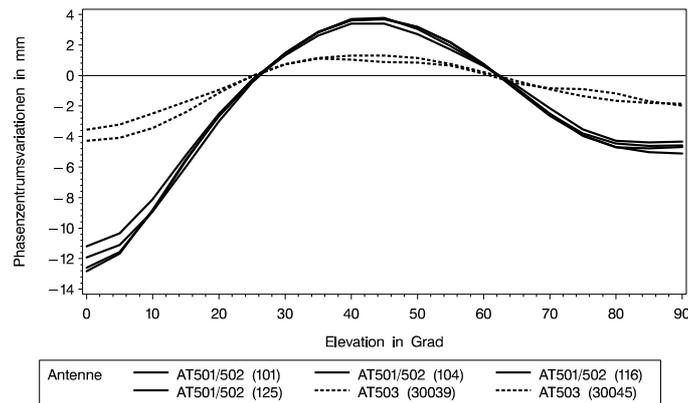


Abb. 2.16: Phasenzentrumsvariationen für zwei verschiedene Leica-Antennentypen.

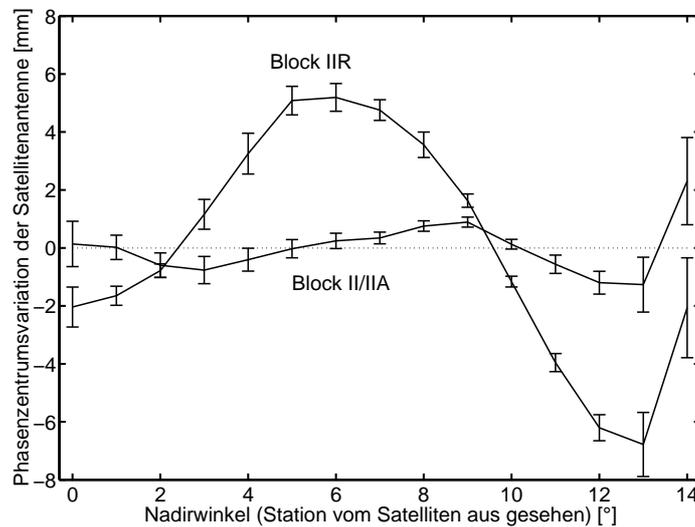


Abb. 2.17: Phasenzentrumsvariationen der GPS-Satellitenantennen.

mit dem Einheitsvektor \mathbf{e} in Richtung vom Empfänger zum Satelliten, dem Zenitwinkel z und dem Azimut α .

In Abbildung 2.16 sind die elevationsabhängigen Variationen des Antennenphasenzentrums für zwei unterschiedliche Leica-Antennentypen dargestellt. Man sieht, dass Antennen desselben Typs recht gut übereinstimmen, dass aber verschiedene Antennentypen sehr unterschiedliche Phasenzentrumsvariationen aufweisen können. Konsistente Sätze von Antennenkorrekturwerten werden vom IGS für die meisten der gängigen GPS-Antennen zur Verfügung gestellt (ftp://igsb.jpl.nasa.gov/igsb/station/general/igs_01.pcv). Die IGS-Werte (zusammen mit eindeutigen Namen für Empfänger und Antennen) sind zu einem weltweiten Standard geworden; sie sind verpflichtend für globale und regionale Daten- und Analyse-Zentren (z.B. für EUREF; für RINEX).

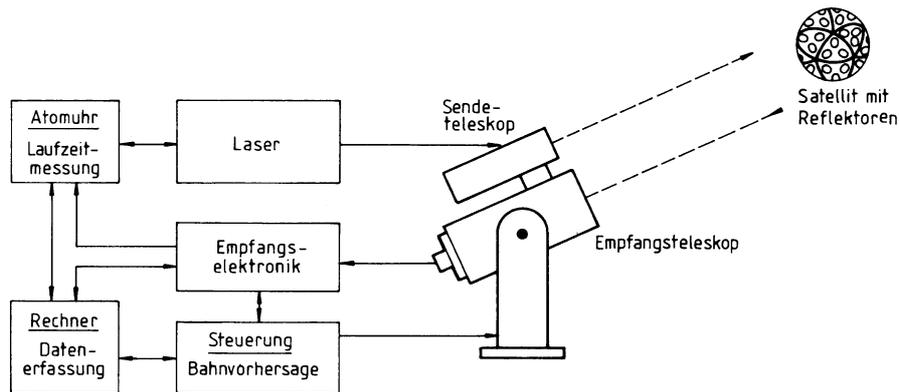


Abb. 2.18: Prinzip der Laserdistanzmessung zu Satelliten (SLR).

Auch Korrekturen für das Phasenzentrum des Satelliten müssen angebracht werden (siehe (2.45)). Abbildung 2.17 zeigt die Phasenzentrumsvariationen für die Block II/IIA- und die Block IIR-Satelliten, wie sie von uns hier an der TU München aus globalen GPS-Daten bestimmt worden sind. So wie die Phasenzentrumsoffsets und -variationen für die Empfängerantennen konsistent benutzt werden müssen, so müssen auch die Satellitenantennenkorrekturen (Offsets und Variationen) zusammenpassen. Wichtig ist zudem, dass die Empfängerantennenkorrekturen mit den Korrekturen, die für die Satellitenantennen verwendet werden, konsistent sind.

2.3 Satellite und Lunar Laser Ranging (SLR und LLR)

2.3.1 Grundprinzip der SLR/LLR-Messung

Das Grundprinzip der Laserdistanzmessungen zu Satelliten (SLR) ist sehr einfach (siehe Abb. 2.18). Im Sendeteil der Bodenstation wird ein kurzer Laserpuls erzeugt und über ein optisches System (Teleskop) zum Satelliten geschickt. Gleichzeitig wird der elektronische Zeitintervall-Zähler gestartet. Der anvisierte Satellit hat an seiner Oberfläche geeignete Reflektoren angebracht, die den Laserpuls zur Bodenstation zurück reflektieren. Mit einer Empfangsoptik an der Bodenstation wird der reflektierte Puls schliesslich registriert, verstärkt und analysiert. Die Ankunft des Pulses stoppt ausserdem den Intervallzähler. Aus der Differenz zwischen Aussendezeit und Empfangszeit, der Lichtlaufzeit, lässt sich mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit c die Entfernung ρ zwischen Satellit und Bodenstation berechnen:

$$\rho = c \cdot \frac{\Delta t}{2} \quad (2.61)$$

Beim Lunar Laser Ranging (LLR) wird anstatt auf künstliche Satelliten auf den Mond gezielt, wo im Zuge verschiedener Mondmissionen Reflektoren aufgestellt wurden.

Die SLR-Messungen gehören mit VLBI und GPS/GLONASS zu den genauesten Messverfahren der Satellitengeodäsie. Die wesentlichen Vorteile der SLR-Messungen

sind:

- hohes Genauigkeitspotential, vor allem wegen der günstigen Ausbreitungseigenschaften von Licht in der Atmosphäre
- direkte Distanzmessung
- Satelliten mit langer Lebensdauer
- einfache Ausstattung eines Satelliten (nichts ausser den Retroreflektoren)

Als Nachteile erweisen sich:

- Abhängigkeit vom Wetter
- relativ teure Infrastruktur und Instrumentierung
- schwer transportierbare Stationen

2.3.2 SLR-Satelliten

Da es sehr einfach ist, einen Satelliten mit Reflektoren auszurüsten, werden SLR-Beobachtungen sehr oft (neben anderen Beobachtungsverfahren) für die genaue Bahnbestimmung von Satelliten verwendet. Heute werden von den rund 35 weltweit verteilten SLR-Stationen mehr als 30 verschiedene Satelliten mit den unterschiedlichsten Zielsetzungen beobachtet. Ein Beispiel eines typischen SLR-Satelliten für die Bestimmung geodätischer/geophysikalischer Parameter ist in Abbildung 1.1 zu sehen (Lageos II). Diese Satelliten sind meist klein und kugelförmig mit einem Durchmesser von nur wenigen Dezimetern. Die wohl ältesten Satelliten sind *Starlette* und *Lageos I* (1975 und 1976 in Umlauf gebracht). Diese Satelliten wurden mit dem Gedanken entworfen, die Oberflächenkräfte (Strahlungsdruck und Luftwiderstand) möglichst klein zu halten.

2.3.3 SLR-Systemkomponenten

Die vier wichtigsten Komponenten eines SLR-Systems am Boden sind:

- Generator der Laserpulse
- Optisches Sendeteleskop für das gezielte Aussenden der Laserpulse
- Empfangssystem: Detektor und Analysator der zurückkehrenden Pulse (Echos)
- Zeitmesseinrichtung für Epochenregistrierung und Laufzeitmessung

Das Herzstück eines SLR-Systems ist der Laseroszillator. Das Wort Laser kommt von *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. In einem Laser werden die elektromagnetischen Schwingungen in einem optischen Resonator durch sogenannte induzierte Emission kohärent verstärkt.

In der Satellitengeodäsie nutzt man neben der Kohärenz der Lichtpulse, d.h. der festen Phasenbeziehung zwischen den einzelnen Photonen, auch die hohe Bündelung und die grosse Energiedichte der Pulse. So gelingt es, in kurzen Pulsen sehr grosse

Mengen an Photonen auszusenden. Am besten eignen sich für diese Zwecke Feststofflaser. Heute werden vorwiegend Neodymium-YAG-Laser eingesetzt (YAG=Yttrium-Aluminium-Granat), die Pulslängen von nur 100–200 ps ermöglichen.

Die Energie des Laserimpulses pro Flächeneinheit nimmt auf dem Weg zum Satelliten und zurück mit dem Quadrat der Entfernung ab. Zusätzlich wird das Signal durch die Atmosphäre geschwächt. Trotz der starken Bündelung und der hohen Energiedichte kommen deshalb von weiter entfernten Satelliten (GPS, GLONASS) nur wenige Photonen zurück. Sie werden mit einem optischen Teleskop (möglichst grosser Spiegel) empfangen und mit einem Photomultiplier oder einer Diode detektiert.

Zur Laufzeitmessung werden elektronische Zähler mit einer Zeitauflösung von rund 10 ps (3 mm) verwendet. Diese Zähler werden von einer Atomuhr (Rubidium, Cäsium oder Wasserstoffmaser) mit guter Kurz- und Langzeitstabilität gesteuert.

2.3.4 Beobachtungsgleichung

Die vereinfachte Beobachtungsgleichung (2.61) für Laserdistanzmessungen zu Satelliten muss um einige Korrekturgrößen erweitert werden:

$$\Delta t_E^S = \frac{2}{c} (\rho_E^S + \delta\rho_{atm} + \delta\rho_{rel}) + \frac{1}{c} \delta\rho_{sys} + \epsilon_E^S \quad (2.62)$$

mit

Δt_E^S	Gemessene Lichtlaufzeit von der Station zum Satelliten und zurück
ρ_E^S	Geometrische Distanz zwischen Satellit und Empfänger zum Zeitpunkt t^S der Reflexion am Satelliten
$\delta\rho_{atm}$	Laufzeitverzögerung (Refraktion) in der Atmosphäre
$\delta\rho_{rel}$	Relativistische Laufzeitkorrektur
$\delta\rho_{sys}$	Signalverzögerung im Lasersystem
ϵ_E^S	Messfehler

Genau genommen müsste die rein geometrische Laufzeit $\Delta t_{E,g}^S$ des Pulses aus den zwei Einzellaufzeiten Δt_1 und Δt_2 (zum Satellit hin und zurück) berechnet werden:

$$\Delta t_{E,g}^S = \Delta t_1 + \Delta t_2 = (|\mathbf{r}^S(t^S) - \mathbf{r}_E(t^S - \Delta t_1)| + |\mathbf{r}^S(t^S) - \mathbf{r}_E(t^S + \Delta t_2)|) / c \quad (2.63)$$

Mit einer Reihenentwicklung der Stationspositionen $\mathbf{r}_E(t^S - \Delta t_1)$ und $\mathbf{r}_E(t^S + \Delta t_2)$ um den Zeitpunkt t^S und mit der Näherung

$$\mathbf{r}_E(t^S - \Delta t_1) \approx \mathbf{r}_E(t^S) - \frac{1}{2} \Delta t_E^S \quad (2.64a)$$

$$\mathbf{r}_E(t^S + \Delta t_2) \approx \mathbf{r}_E(t^S) + \frac{1}{2} \Delta t_E^S \quad (2.64b)$$

kann man zeigen, dass bis auf quadratische Terme in $\Delta t_{E,g}^S$ gilt:

$$\Delta t_{E,g}^S = \frac{2}{c} |\mathbf{r}^S(t^S) - \mathbf{r}_E(t^S)| \quad (2.65)$$

Für einen Satelliten in einer Höhe von 20'000 km (GPS oder GLONASS; die höchsten Satelliten, die zurzeit mit SLR angemessen werden) beträgt die Lichtlaufzeit (hin und zurück) rund 0.13 Sekunden. Der in (2.65) vernachlässigte quadratische Term (Erdrotation während der ganzen Lichtlaufzeit Δt_E^S) lässt sich dann grob wie folgt abschätzen (siehe auch (2.13)):

$$\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_E (\Delta t_E^S)^2 \approx \frac{1}{2} \Omega_E^2 R_E (\Delta t_E^S)^2 \approx \frac{1}{2} \cdot (7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 \cdot (0.13)^2 \text{ m} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (2.66)$$

Er kann damit für künstliche Erdsatelliten mit gutem Gewissen vernachlässigt werden. Für Messungen zum Mond gilt diese Vereinfachung allerdings nicht.

Den Einfluss der atmosphärischen Refraktion $\delta\rho_{atm}$ werden wir später genauer behandeln.

Die relativistische Korrektur $\delta\rho_{rel}$ für die Distanz lässt sich genau gleich wie bei GPS mit Formel (2.51) berechnen; sie hat auch dieselbe Größenordnung (maximal 1–2 cm).

Wie im Falle von GPS/GLONASS müssen wir, um den geometrischen Term $\Delta t_{E,g}^S$ berechnen zu können, die Position des Satelliten und der Station im gleichen Referenzsystem kennen. Wir nehmen wieder an, dass beide Positionen ($\mathbf{r}^S(t^S)$ und $\mathbf{r}_E(t^S)$) in einem raumfesten geozentrischen System (z.B. J2000.0) gegeben sind. Für die Satellitenposition (zum Zeitpunkt t^S) gilt dann

$$\mathbf{r}^S = \mathbf{r}_0^S + \Delta\mathbf{r}_{ret}^S \quad (2.67)$$

wobei

\mathbf{r}_0^S Massenschwerpunkt des Satelliten
 $\Delta\mathbf{r}_{ret}^S$ Differenz zwischen der Position des Retroreflektors und dem Massenschwerpunkt \mathbf{r}_0^S des Satelliten. Diese Korrektur soll auch die exakte Geometrie des Retroreflektors beinhalten (Weg des Laser-Pulses im Reflektor).

Um die genaue Position $\Delta\mathbf{r}_{ret}^S$ des Reflektors gegenüber dem Massenschwerpunkt zu ermitteln, ist auch ein detailliertes Orientierungsmodell (attitude model) für den Satelliten unabdingbar. Es muss auch bekannt sein, ob sich der Massenschwerpunkt allenfalls im Laufe der Zeit verändert (z.B. durch Treibstoffverbrauch).

Die Empfängerposition \mathbf{r}_E (zur Zeit t^S) erhält man aus den erdfesten Koordinaten des Empfängers $\mathbf{r}_{E,e}$ genau gleich bei VLBI und GPS mit Hilfe von Gleichung (2.24):

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{PNUXY} \mathbf{r}_{E,e} \quad (2.68)$$

Und wie bei VLBI und GPS muss die Position $\mathbf{r}_{E,e}$ des Empfängers zunächst im erdfesten System mit allen in (2.25) aufgezählten zeitabhängigen Korrekturen versehen werden.

Die Epoche der SLR-Messung muss man auf ca. 1 μs genau kennen, damit man bei der Berechnung der Satellitenposition und der Stationsposition keinen merklichen Fehler begeht.

2.3.5 Instrumentelle Einflüsse

Auch bei den SLR-Messungen stellt sich das Problem, auf welchen Punkt sich die Entfernungsmessung beziehen soll. Also auch hier gibt es einen Term $\Delta \mathbf{r}_{i,ant}$ (vgl. (2.25)) zu berücksichtigen. Im allgemeinen wird wie bei VLBI der Schnittpunkt der Horizontal- und der Vertikalachse der Montierung als Referenzpunkt für die Distanzmessungen gewählt. Dieser Punkt muss natürlich mit terrestrischen Messungen mit einer Genauigkeit von etwa 1 mm an den Stations-Marker (Monument) angeschlossen werden. Die Stabilität der Montierung muss ebenfalls von Zeit zu Zeit überprüft werden.

Da der geometrische Bezugspunkt im Lasersystem nicht zwingend mit dem elektrischen Referenzpunkt der Messung zusammenfällt, muss eine Verzögerung (delay) $\delta \rho_{sys}$ (siehe (2.62)) im Messinstrument berücksichtigt werden. Dieser Systemfehler muss durch Kalibrierungsmessungen bestimmt werden. Kalibrierungsmessungen erhält man beispielsweise durch das Messen einer bekannten Entfernung zu einem nahe gelegenen terrestrischen Ziel. Heute wird oft kalibriert, indem ein Teil des Laserpulses auf einem Weg bekannter Länge direkt ins Empfangsteleskop zurückgestreut wird (interne Kalibrierung).

2.3.6 Preprocessing und Normalpoints

Die Entfernungsmessungen werden nach einem Satellitendurchgang auf fehlerhafte Daten überprüft. Schlechte Messungen werden eliminiert und die Daten werden reduziert und komprimiert. Bei den heutigen Pulsraten von 10 Hz können pro Satellitendurchgang durchaus 2000–3000 Messpunkte anfallen. Diese Messungen sind jedoch stark korreliert. Die Information wird deshalb durch die Bildung sogenannter *Normalpoints* komprimiert. Über ein Zeitintervall von einer halben Minute bis zu ein paar Minuten werden dabei die Beobachtungen zu einer einzelnen Distanzmessung (mit einem kleineren Rauschen) zusammengefasst.

2.3.7 Lunar Laser Ranging (LLR)

Um auch die Distanz zum Mond mit Laserpulsen messen zu können, wurde im Juli 1969 als Teil der Apollo 11 Mission ein erster Reflektor-Array (bestehend aus 100 Einzelreflektoren) auf dem Mond aufgestellt. Weitere Reflektoranordnungen folgten mit den Missionen Apollo 14 und 15 sowie Lunokhod 1 und 2.

Die Lasermessungen zum Mond dienen dazu,

- die Dynamik des Systems Erde-Mond (oder auch Erde-Mond-Sonne) zu studieren (Gezeiten, Libration, Verlangsamung der Erdrotation, ...),
- Voraussagen allgemein-relativistischer Theorien zu überprüfen und
- Erdorientierungsparameter zu bestimmen (Nutation, Präzession).

Die Entfernungsmessungen zum Mond stellen wesentlich grössere Anforderungen an das Lasersystem als Beobachtungen zu erdnahen Satelliten. Bei Echos vom Mond

kann nur mit der Detektion einzelner Photonen gerechnet werden, obschon ca. 10^{18} Photonen ausgesendet werden. Um überhaupt Echos vom Mond erhalten und detektieren zu können, muss man sehr genau auf den Reflektor auf dem Mond zielen (Genauigkeit ca. 1", Nachführung) und das Zeitfenster für das zurückkehrende Signal wegen des Hintergrundrauschens sehr eng setzen können. Um das Zeitfenster für die Detektion auf 200 ns einengen zu können, muss man die Mondsdistanz auf etwa 15 m genau berechnen können.

Wegen der hohen instrumentellen Anforderungen sind nur wenige Lasersysteme fähig, Distanzmessungen zum Mond durchzuführen: Grasse (Frankreich), McDonald (Texas, USA), Wettzell (Deutschland) und früher Haleakala (Hawaii).

Analog zur Beobachtungsgleichung (2.62) für SLR gilt hier

$$\Delta t_E^M = \frac{1}{c} (\rho_{E,f}^M + \rho_{E,b}^M + \delta\rho_{atm,f} + \delta\rho_{atm,b} + \delta\rho_{rel,f} + \delta\rho_{rel,b} + \delta\rho_{sys}) + \epsilon_E^M \quad (2.69)$$

wobei

Δt_E^M	Gemessene Lichtlaufzeit von der Station zum Mond und zurück
$\rho_{E,f}^M$	Distanz zwischen Station und Mond für den zum Mond laufenden Puls (f: forward)
$\rho_{E,b}^M$	Distanz zwischen Mond und Station für den vom Mond zurückkehrenden Puls (b: backward)
$\delta\rho_{atm,f}, \delta\rho_{atm,b}$	Laufzeitverzögerungen (Refraktion) in der Atmosphäre für den ausgesandten und den zurückkehrenden Puls
$\delta\rho_{rel,f}, \delta\rho_{rel,b}$	Relativistische Laufzeitkorrekturen
$\delta\rho_{sys}$	Signalverzögerung im Lasersystem
ϵ_E^M	Messfehler

Wie wir bereits in Abschnitt 2.3.4 gesehen haben, gilt für LLR die Näherung (2.65) nicht mehr und wir haben die zwei Distanzen $\rho_{E,f}^M$ und $\rho_{E,b}^M$ zu berechnen gemäss

$$\rho_{E,f}^M = |\mathbf{R}^M(t^M) - \mathbf{R}_E(t^M - \Delta t_f)| \quad (2.70a)$$

$$\rho_{E,b}^M = |\mathbf{R}^M(t^M) - \mathbf{R}_E(t^M + \Delta t_b)| \quad (2.70b)$$

mit den Lichtlaufzeiten $\Delta t_f = \rho_{E,f}^M/c$ und $\Delta t_b = \rho_{E,b}^M/c$ sowie den Positionen \mathbf{R}^M und \mathbf{R}_E des Mondreflektors und der Station in einem baryzentrischen System. Die Positionen \mathbf{R}^M und \mathbf{R}_E werden wegen der relativistischen Einflüsse (Bewegung von Erde und Mond im Gravitationsfeld der Sonne) in einem baryzentrischen System ausgedrückt. Es gilt dabei

$$\mathbf{R}^M = \mathbf{R}_0^M + \mathbf{r}^M \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{R}_E = \mathbf{R}_{E,0} + \mathbf{r}_E \quad (2.71b)$$

mit

\mathbf{R}_0^M	Baryzentrische Koordinaten des Schwerpunktes des Mondes
\mathbf{r}^M	Koordinaten des Reflektors in einem Referenzsystem bezogen auf den Schwerpunkt des Mondes (selenozentrische Koordinaten)
$\mathbf{R}_{E,0}$	Baryzentrische Koordinaten des Schwerpunktes der Erde
\mathbf{r}_E	Koordinaten der Station in einem geozentrischen Referenzsystem

Wir sehen anhand der Gleichungen (2.69) und (2.71), dass sowohl die Bahnen als auch die Rotation der beiden Körper (Erde und Mond) in die Berechnung der Distanzen einfließen. Die LLR-Messungen liefern daher Beiträge zu folgenden Punkten:

- geozentrische Koordinaten der Bodenstationen (erdfestes Referenzsystem, Plattentektonik)
- Erdorientierungsparameter (Polschwankung, UT1, Nutation und Präzession)
- selenozentrische Koordinaten der Reflektor-Arrays (mondfestes Referenzsystem)
- Parameter der Mondbahn
- Rotation des Mondes (Libration)
- Niedere Koeffizienten des Mondschwerefeldes
- Gezeitenreibung (Drehimpulsaustausch zwischen Erde und Mond)
- Gesamtmasse des Systems Erde-Mond
- Parameter relativistischer Gravitationstheorien

Bei der Schätzung der verschiedenen Parameter werden jeweils einige Parametertypen festgehalten oder aus anderen Quellen übernommen (z.B. Erdorientierungsparameter) und die anderen aus den LLR-Beobachtungen bestimmt.

Aus der langen Zeitreihe von LLR-Beobachtungen ist es möglich, eine sehr genaue MondepheMERIDE zu berechnen. Daraus ergeben sich interessante geophysikalische Resultate. So wurde beispielsweise eine Zunahme des Abstandes zwischen Erde und Mond um 3.8 cm/Jahr nachgewiesen, die auf die Gezeitenreibung zurückzuführen und direkt mit der Verlangsamung der Erdrotation gekoppelt ist. Wie diese Kopplung aufgrund der Drehimpulserhaltung zustande kommt, wollen wir kurz herleiten.

Unter Vernachlässigung des Einflusses der Sonne und der Planeten können wir den Drehimpuls \mathbf{L}_r des Systems Erde-Mond relativ zum Schwerpunkt des Systems schreiben als:

$$\mathbf{L}_r = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{L}_E + \mathbf{L}_M \quad (2.72)$$

Dabei ist $\mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ der Bahndrehimpuls von Erde und Mond bezogen auf den gemeinsamen Schwerpunkt, \mathbf{L}_E und \mathbf{L}_M die Drehimpulsbeiträge aufgrund der Rotation der beiden Körper um sich selbst. $\mu = \frac{M_E M_M}{M_E + M_M}$ bezeichnet die sogenannte *reduzierte Masse* des Systems Erde-Mond, \mathbf{r} und $\dot{\mathbf{r}}$ den Relativort und die Relativgeschwindigkeit des Mondes gegenüber der Erde.

Wie wir wissen, bleibt der Drehimpuls \mathbf{L}_r erhalten. In guter Näherung bleiben sogar die einzelnen in (2.72) vorhandenen Komponenten erhalten. Über lange Zeitperioden ändern sie sich jedoch, weil (1) die Erde nicht kugelsymmetrisch ist und (2) wegen der

Gezeitenreibung. Die Energieverluste durch die Erdgezeiten verlangsamen die Erdrotation ganz allmählich: während die Erde sich dreht, versucht sie, die Gezeitenwülste mit sich zu nehmen. Der Mond versucht jedoch, die Wülste wieder auf eine gerade Linie zwischen Erde und Mond zu bringen. Das resultierende Drehmoment verlangsamt die Erdrotation (Drehimpuls der Erddrehung) und vergrößert zugleich den Bahndrehimpuls. Um diesen Effekt etwas genauer diskutieren zu können, vernachlässigen wir den Rotationsdrehimpuls \mathbf{L}_M des Mondes in Gleichung (2.72) (kleiner Term gegenüber den anderen beiden Termen) und nehmen an, dass die Erdachse senkrecht zur Bahnebene des Mondes steht. Der Drehimpuls der Erde hat die Form $|\mathbf{L}_E| = I \Omega_E$, wobei I der sogenannte Trägheitstensor und Ω_E die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist. Für eine homogene Kugel mit Radius R_E gilt $I = \frac{2}{5} M_E R_E^2$. Da die Dichte der Erde zum Zentrum hin zunimmt, gilt genauer $I = 0.33 M_E R_E^2$. Somit ergibt sich für den Drehimpuls relativ zum Schwerpunkt:

$$|\mathbf{L}_r| = L_r = \mu a^2 \Omega_B + 0.33 M_E R_E^2 \Omega_E \quad (2.73)$$

Dabei ist a die grosse Halbachse der Mondbahn und Ω_B die Winkelgeschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn um die Erde. Das dritte Keplersche Gesetz liefert (mit $\Omega_B = \frac{2\pi}{T}$)

$$\Omega_B^2 a^3 = G M_E \quad \text{also} \quad \Omega_B = \sqrt{\frac{G M_E}{a^3}} \quad (2.74)$$

Eingesetzt in die Drehimpulsgleichung ergibt dies:

$$L_r = \mu \sqrt{G M_E a} + 0.33 M_E R_E^2 \Omega_E \quad (2.75)$$

Differenzieren nach der Zeit liefert schliesslich

$$\frac{1}{2} \mu \sqrt{\frac{G M_E}{a}} \frac{\Delta a}{\Delta t} + 0.33 M_E R_E^2 \frac{\Delta \Omega_E}{\Delta t} = 0 \quad (2.76)$$

Daraus folgt für ein kurzes Zeitintervall Δt (Multiplikation mit Δt):

$$\Delta a = -0.66 \frac{M_E}{\mu} R_E^2 \sqrt{\frac{a}{G M_E}} \Delta \Omega_E \quad (2.77)$$

Setzen wir numerische Werte ein, so erhalten wir

$$\Delta a = -2.17 \cdot 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s} \Delta \Omega_E \quad (2.78)$$

Wir sehen, dass sich aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes der Abstand zwischen Erde und Mond vergrößert, wenn sich die Erdrotation verlangsamt ($\Delta a > 0$ für $\Delta \Omega_E < 0$). Der Tag wird in einem Jahrhundert um etwa $\Delta T = 1.6$ ms länger, d.h. in einem Jahrhundert nimmt die Winkelgeschwindigkeit Ω_E um $\Delta \Omega_E = -\frac{2\pi}{T^2} \Delta T = -1.347 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ ab. Falls die gesamte Verlangsamung der Erdrotation den Gezeiteneffekten des Mondes zuzuschreiben ist, entfernt sich der Mond von der Erde um 2.92 m pro Jahrhundert, also um etwa 3 cm pro Jahr. Dies ist nur eine grobe Abschätzung, da wir verschiedene Effekte (wie z.B. die Neigung der Erdachse gegenüber der Ebene der Mondbahn) vernachlässigt haben. Sie stimmt aber recht gut mit dem aus den LLR-Daten bestimmten Wert von 3.8 cm/Jahr überein.

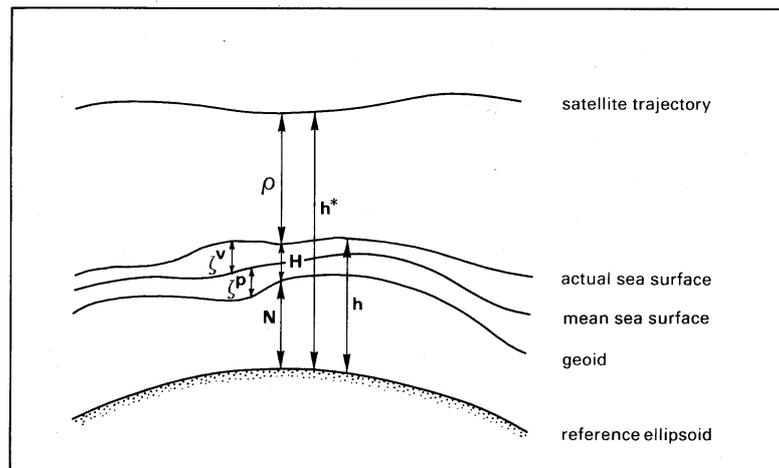


Abb. 2.19: Prinzip der Altimeter-Messung [Schrama, 1989].

2.4 Satellitenaltimetrie

2.4.1 Grundprinzip der Satellitenaltimetrie

Ein sog. Altimeter-Satellit sendet über eine Antenne Mikrowellenpulse im Radarfrequenzbereich (ca. 14 GHz) aus und empfängt mit einem *Radaraltimeter*, einem Mikrowellensensor, die an der Erdoberfläche reflektierten Signale. Durch Messung der Laufzeit der Signale kann die Höhe ρ des Satelliten über der Erdoberfläche bestimmt werden:

$$\rho = c \frac{\Delta t}{2} \quad (2.79)$$

Die Pulslänge beträgt wenige Nanosekunden und die Messgenauigkeit liegt zwischen wenigen Zentimetern und etwa einem Meter. Besonders gute Messungen liefert dieses Verfahren wegen der günstigen Reflexionseigenschaften über Wasseroberflächen. Der Radarpuls des Satelliten beleuchtet auf der Meeresoberfläche (je nach der räumlichen Auflösung des Strahls) eine Fläche mit einem Durchmesser von einigen Kilometern, den sogenannten *Footprint*. Die Laufzeitmessung liefert daher eine mittlere Höhe des Satelliten über dem Footprint.

Wenn wir annehmen, dass wir die Bahn des Altimeter-Satelliten genau kennen, so können wir die Position des Satelliten und damit die Höhe h^* des Satelliten über dem Referenzellipsoid zum Zeitpunkt der Altimetermessung berechnen. Wenn wir die momentane Höhe der Meeresoberfläche mit h bezeichnen, so folgt die einfache Beobachtungsgleichung (siehe Abb. 2.19):

$$\rho = h^* - h \quad (2.80)$$

Dabei soll die Messung ρ die kürzeste Distanz zwischen Satellit und Meeresoberfläche repräsentieren. Der Einfluss einer schiefen Meeresoberfläche ist sehr klein (ein paar Millimeter) und wird hier nicht berücksichtigt.

Tabelle 2.4: Allgemeine Charakteristiken der Altimeter-Missionen

Mission	Start [Jahr/Mo]	Dauer [Mon]	Höhe [km]	Inkl. [Grad]	Lat. [Grad]	Zyklen [Tage]	Tracking System(s)	Freq. [GHz]	Radio- meter	RMS [cm]
Skylab	1973(74)	–	435	130	±50	–				
Geos-3	1975/04	42	840	115	±65	~37	SLR/Doppler	13.9	–	~50
Seasat	1978/07	3	800	108	±72	3,17	SLR	13.8	Ja	~10
Geosat	1985/10	36	800	108	±72	17	Doppler	13.5	–	7
ERS-1	1991/07	57	780	98.5	±81.5	3,35,168	SLR	13.5	Ja	5
Topex/ Poseidon	1992/09	...	1335	66	±66	10	SLR/GPS	13.6	Ja	2
			1335	66	±66	10	DORIS	5.3		
ERS-2	1995/04	...	780	98.5	±81.5	3,35	SLR/PRARE	13.8	Ja	5
GFO	1998/02	...	800	108	±72	17	GPS/SLR	13.5	Ja	<5
Envisat	2002/03	...	780	98.5	±81.5	35	SLR	13.58	Ja	<2
							DORIS	3.2		
Jason	2001/12	...	1335	66	±66	10	SLR/GPS	dual	Ja	<2
							DORIS			

Die Höhe h kann man nun aufteilen in die *Höhe über dem Geoid* N und die Abweichung H der momentanen Meeresoberfläche vom Geoid (siehe Abb. 2.19). Damit folgt

$$\rho = h^* - N - H \quad \text{oder} \quad h^* = \rho + N + H \quad (2.81)$$

Diese Gleichung zeigt, dass mit Hilfe eines Radaraltimeters unmittelbar die Meeresoberfläche und damit näherungsweise das Geoid im Bereich der Ozeane abgetastet werden kann (N ist von der Größenordnung 100 m, H beträgt maximal ein paar Meter). Die Satellitenaltimetrie stellt ein gutes Beispiel für den interdisziplinären Charakter der Satellitengeodäsie dar: während die Abweichungen H der Meeresoberfläche vom Geoid für den Geodäten eine Störung bedeuten, die korrigiert werden muss, sind sie für den Ozeanographen ein wichtiges Messsignal, um Informationen über die Dynamik der Meere zu erhalten (Strömungen, Meereszeiten). Der Geophysiker schliesslich kann Aufschlüsse über die Strukturen des Meeresbodens gewinnen (Kontinentalränder, Bruchzonen, ...).

Die Bedeutung der Satellitenaltimetrie liegt insbesondere darin, dass Ozeangebiete innerhalb kurzer Zeit flächenhaft vermessen werden können und damit zeitlich und räumlich hochauflösende Darstellungen der Meeresoberfläche möglich werden.

2.4.2 Altimetermissionen

Die ersten Versuche mit Satellitenaltimetrie wurden während der *Skylab*-Missionen durchgeführt (siehe Tabelle 2.4 und Abbildung 2.20). Verbesserte Altimeterinstrumente wurden dann auf den Satelliten *GEOS-3* (Geodynamics Experimental Ocean Satellite, Start 1975) und *SEASAT-A* (Start 1978) geflogen. Die weiteren Missionen sind in Tabelle 2.4 charakterisiert. Mit der Topex/Poseidon-Mission (Abbildung 1.3 zeigt den Topex/Poseidon-Satelliten) hat man eine Genauigkeit von rund 3 cm für die Altimeter-Messungen und 3 cm für die radiale Satellitenposition erreicht, also

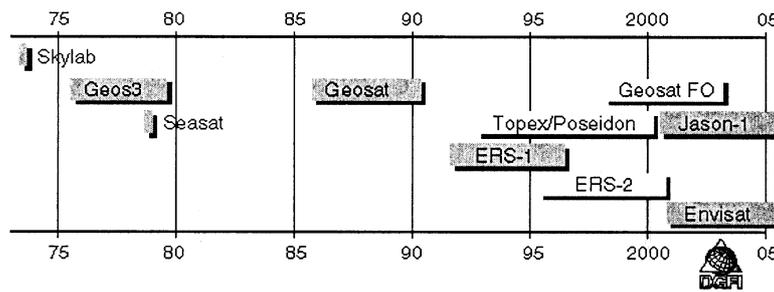


Abb. 2.20: Altimetrie-Missionen (DGFI, 2000).

insgesamt etwa 4.5 cm für die Höhe der Meeresoberfläche.

Die Satellitenbahnen müssen übrigens so gewählt werden, dass die Höhenänderungen des Satelliten möglichst klein sind (instrumentelle Anforderung des Altimeters) und dass die “ground tracks” des Satelliten die Erde möglichst vollständig abdecken.

2.4.3 Beobachtungsgleichung

Eine einfache Form der Beobachtungsgleichung für die Satellitenaltimetrie haben wir bereits mit (2.81) aufgestellt. Gewöhnlich wird die Meereshöhe H über dem Geoid noch in die permanente (oder mittlere) Topographie der Meeresoberfläche ζ^p (mean sea surface topography (mean SST); bis zu 2 m) und die variable Meeresoberflächentopographie ζ^v (ca. 1 m im offenen Meer, bis zu 2 m in Küstennähe) aufgespalten (vgl. Abb. 2.19). Fügen wir noch verschiedene Korrekturterme und den Fehler ϵ der Altimetermessung hinzu, so erhalten wir für die Altimetrie-Beobachtungsgleichung:

$$\rho = h^* - N - \zeta^p - \zeta^v + \delta h_{trp} + \delta h_{ion} + \delta h_{wav} + \delta h_{sys} + \epsilon \quad (2.82)$$

Dabei bezeichnen

δh_{trp} Laufzeitverzögerung aufgrund der Troposphäre

δh_{ion} Laufzeitverzögerung aufgrund der Ionosphäre

δh_{wav} Korrektur für die Windwellen auf der Meeresoberfläche. Sie wird berechnet aufgrund der *significant wave height* (SWH), die aus der zeitlichen Verteilung des reflektierten Pulses ermittelt werden kann.

δh_{sys} Instrumentelle Korrekturen (siehe Abschnitt 2.4.4)

Falls mit zwei Frequenzen gemessen wird (wie bei Topex/Poseidon), kann die ionosphärische Refraktion eliminiert werden. Andernfalls müssen externe Ionosphärenmodelle berücksichtigt werden (z.B. von GPS).

Die troposphärische Refraktion wird mit Hilfe eines Troposphärenmodells korrigiert. Falls ein Radiometer (siehe Tabelle 2.4) zur Satellitenausrüstung gehört, kann der feuchte Anteil der Troposphäre (Wasserdampf), der schwer zu modellieren ist, aus den Radiometerdaten ermittelt werden.

Die momentane Meereshöhe $H = \zeta^p + \zeta^v$ über dem Geoid enthält den variablen Anteil ζ^v . Man versucht ζ^v mit den folgenden Korrekturen modellmässig möglichst gut in den Griff zu bekommen:

- Gezeiten der festen Erde und der Meere: Der Einfluss der Meeresgezeiten wird meist mit einem globalen Meeresgezeitenmodell berechnet (z.B. [Scherneck, 1991]). Für die festen Erdgezeiten gibt es Modelle des IERS (siehe Tabelle 1.1).
- Einfluss des atmosphärischen Drucks auf die Meeresoberflächentopographie: 1 mbar entspricht einer Höhenänderung von 1 cm (Bedingung für ein sogenanntes *inverses Barometer*: instantane Reaktion der Ozeane auf Druckänderungen).

Die Höhe h^* muss natürlich auch um den Unterschied zwischen der Position des Massenschwerpunkts des Satelliten und der Position des Altimeters (center of mass correction) korrigiert werden (siehe auch Gleichung (2.45)). Zur Berechnung dieser Korrektur muss ein genaues Orientierungsmodell (attitude model) für den Altimetersatelliten existieren.

2.4.4 Instrumentelle Einflüsse

Zu den instrumentellen Fehlern bei der Satellitenaltimetrie gehören:

- Offset und Drift in der Laufzeitmessung des Altimeters: diese Fehlerquelle entsteht aufgrund der internen instrumentellen Verzögerungen des Signals im Altimeter. Vor dem Start des Satelliten wird diese Verzögerung kalibriert. Sie muss jedoch auch während der Mission überprüft werden. Dazu dienen Überflüge über eine SLR-Station. Die Altimeter-Distanzmessung kann dann mit Hilfe von SLR-Messungen zum Altimetersatelliten kalibriert werden.
- Satellitenuhrfehler: die genaue Zeit der Altimetermessung muss bekannt sein, um die Position des Satelliten zum richtigen Zeitpunkt zu berechnen. Dazu muss man den Fehler der Satellitenuhr kennen, da diese für den Zeitpunkt der Emission der Radarpulse verantwortlich ist.

2.4.5 Fehlerbudget

Das Fehlerbudget für Altimetermessungen ist in Tabelle 2.5 zusammengefasst. Diese Tabelle stammt aus [Tapley *et al.*, 1982] und ist demzufolge nicht mehr in allen Teilen aktuell. Die Grössenordnung der vollen Amplituden ist jedoch immer noch gültig.

Was die Bahnfehler angeht, so spielt das Gravitationspotential der Erde immer noch die bedeutendste Rolle im Fehlerbudget. Verwendet man die neuesten Potentialmodelle, so schätzt man diese Fehler heute auf etwa 60 cm. Die Fehler des Geoids haben heute eine Grössenordnung von rund 50 cm (statt 200 cm wie in Tabelle 2.5) erreicht.

Tabelle 2.5: Altimeter-Fehlerbudget für die SEASAT-Mission nach [Tapley et al., 1982]. Der Restfehler (1σ) gibt an, welcher Fehler nach der Modellierung übrig bleibt. $H_{\frac{1}{3}}$ = significant wave height (SWH).

Fehler-Typ	Fehler-Ursache	Volle Amplitude [cm]	Restfehler [cm]	Wellenlänge [km]
Altimeter	Messrauschen	–	5	–
Altimeter	Bias	10	2	–
Meereszustand	Wellenhöhe	$7 + 2\% \cdot H_{\frac{1}{3}}$	$2\% \cdot H_{\frac{1}{3}}$	500–1000
Troposphäre	Luftmasse	240	1	1000
Troposphäre	Wasserdampf	10–40	3	50–500
Ionosphäre	Freie Elektronen	2–20	3	50–10'000
Flüssiges Wasser	Regen, Wolken	10–100	?	30–50
Bahnfehler	Gravitation	10 km	140	40'000
Bahnfehler	Luftwiderstand	300	30	10'000
Bahnfehler	Strahlungsdruck	300	30	10'000
Bahnfehler	Stationskoord.	100	10	10'000
Satellitenuhr	Epochenfehler	–	5	20'000
Auflasteffekte	Atmosphärendruck	50	3	200–1000
Geoid	Masse der Erde	100 m	200	2000–5000
Erdgezeiten	Mond und Sonne	20	2	20'000
Meeresgezeiten	Mond und Sonne	100	10	500–1000

2.4.6 Bestimmung der mittleren Meeresoberfläche, des Geoids und des Schwerfelds

Nach dem Anbringen der diversen Korrekturen in (2.82) bleiben immer noch systematische Fehler in den Höhen des mittleren Meeresspiegels, vor allem wegen der radialen Bahnfehler. Zur weiteren Behandlung der Altimeterdaten wird nun von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass derselbe Meeresbereich wiederholt abgetastet wird und dass in den sogenannten *Kreuzungspunkten* (*cross-over points* oder kurz *crossovers*) von auf- und absteigenden *ground tracks* (Bodenspuren mit zu- bzw. abnehmender geographischer Breite; vgl. Abb. 2.21) die berechneten Höhen des mittleren Meeresspiegels $N + \zeta^p$ gleich sein müssen. Es werden deshalb die Differenzen der Messungen in den Kreuzungspunkten gebildet. Diese Differenzen sind bei korrigierten Messwerten weitgehend (bis auf die Effekte von ζ^v und andere zeitlich veränderliche Fehlerquellen) identisch mit den radialen Bahnfehlern. Aus diesen Differenzen in den Kreuzungspunkten werden Korrekturen für die Bahnfehler ermittelt (dynamisch oder mit Polynomansätzen), und die Höhen des mittleren Meeresspiegels können entsprechend korrigiert und verbessert werden.

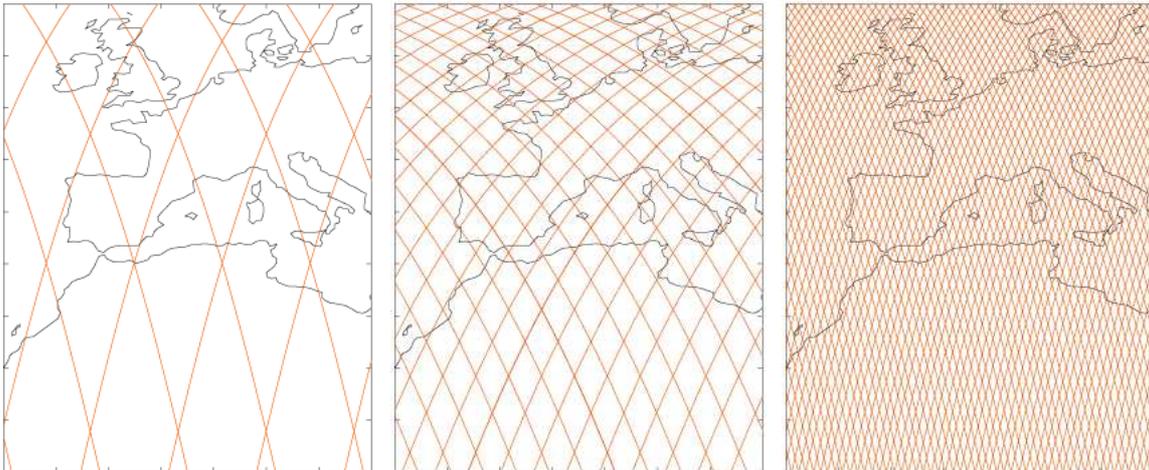


Abb. 2.21: Auf- und absteigende Bodenspuren von ERS-1 (3 Tage), Topex/Poseidon (10 Tage) und ERS-2 (35 Tage).

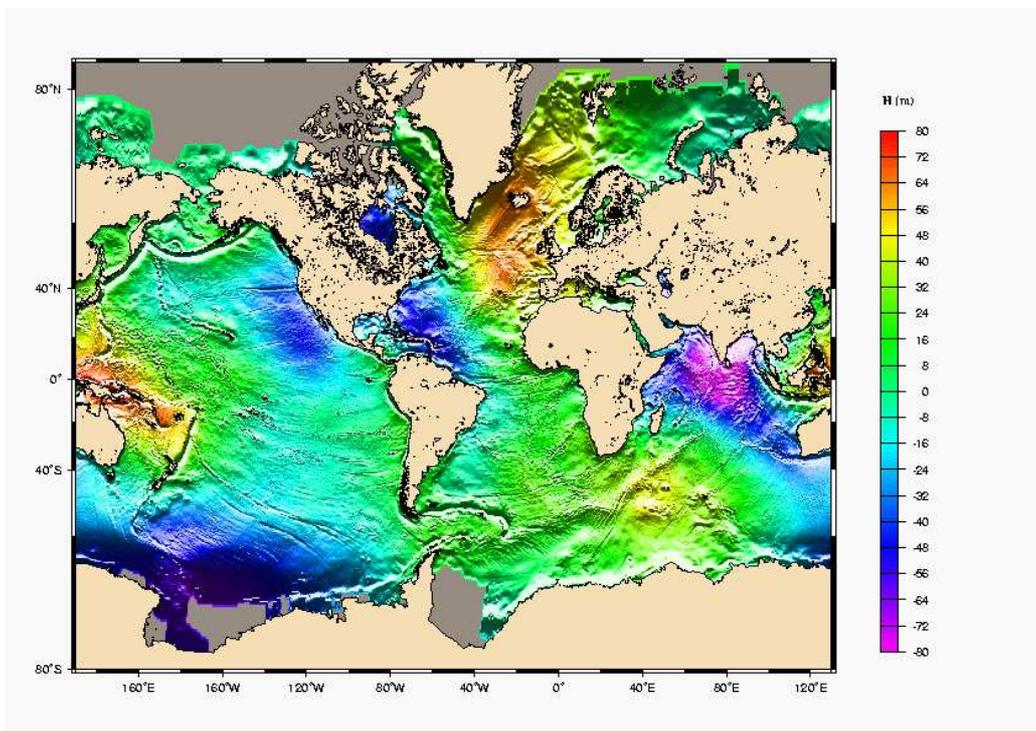


Abb. 2.22: Mittlere Meeresoberflächentopographie aus Altimeter-Daten.

Da die mittlere Meeresoberflächentopographie (siehe Abb. 2.22) und das Geoid im Meeresbereich in erster Näherung gleichgesetzt werden können (bis auf den Term ζ^p , den man möglichst gut modellieren muss), kann mit der Satellitenaltimetrie der Verlauf des Geoids im Meeresbereich sehr genau und mit einer hohen räumlichen

Auflösung bestimmt werden.

Aus den mittels Altimetrie bestimmten Geoidhöhen lassen sich mit Hilfe der inversen Stoke'schen Integrationsformel *Schwereanomalien* berechnen, wodurch die Kenntnis des globalen Schwerefeldes insbesondere im Meeresbereich deutlich verbessert wird. Altimeterdaten sind deshalb Bestandteil der Berechnung aller neueren Erdmodelle. Während aus Satellitenbahnanalysen nur die langwelligen Anteile der Potentialentwicklung ableitbar sind (Grad und Ordnung ~ 20), ermöglichen Altimeterdaten eine wesentlich höhere Auflösung (Grad und Ordnung ~ 200). Zudem können die Crossover-Beobachtungen anstatt zur Korrektur der Höhen des mittleren Meeresspiegels auch direkt für die Bestimmung einer dynamischen Satellitenbahn und damit für die Bestimmung der langwelligen Potentialkoeffizienten verwendet werden.

3. Stationskoordinaten und Stationsbewegungen

Die Bestimmung von Stations- oder Punktkoordinaten ist eine der zentralen Aufgaben der Geodäsie und bildet die Grundlage für

- die Realisierung von erdfesten Referenzsystemen (ITRF, EUREF, DREF, ...),
- die Landesvermessung,
- geodynamische Untersuchungen (Plattentektonik, Gezeiten, Erdbeben, Vulkane),
- geophysikalische Untersuchungen (Verformung der Erde, Eisbewegungen, Einfluss der Atmosphäre, ...),
- die Navigation und Positionierung zu Land, zu Wasser und in der Luft sowie für
- Geoinformationssysteme.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Bestimmung von Stationskoordinaten befassen. Bei den heutigen Genauigkeiten ist es jedoch in vielen Fällen nicht mehr möglich, Stationskoordinaten zu bestimmen, ohne die Bewegung der Stationen (z.B. aufgrund der Erdgezeiten) genau zu modellieren und zu kennen. Die Erde deformiert und verändert sich ja dauernd. Wenn man beispielsweise ein globales erdfestes Referenzsystem im 1-cm-Bereich realisieren will, dann müssen die Bewegungen der Stationen mit mindestens derselben Genauigkeit berechnet werden können.

3.1 Modellierung der Stationsbewegungen

Wie wir bereits in Abschnitt 2.1.9 gesehen haben (siehe Gleichung (2.25)), lässt sich die Position einer Station i auf der Erdoberfläche in einem erdfesten System wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,e}(t) = & \mathbf{r}_{i,e}(t_0) + \mathbf{v}_{i,e}(t - t_0) + \Delta\mathbf{r}_{i,sol} + \Delta\mathbf{r}_{i,pol} \\ & + \Delta\mathbf{r}_{i,ocn} + \Delta\mathbf{r}_{i,atm} + \Delta\mathbf{r}_{i,ant} \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei

$\mathbf{r}_{i,e}(t_0)$	Position der Station im erdfesten System zur Referenzepoche t_0
$\mathbf{v}_{i,e}$	Geschwindigkeit der Station im erdfesten System (Plattenbewegung)
$\Delta\mathbf{r}_{i,ocn}, \Delta\mathbf{r}_{i,atm}$	Auflasteffekte der Ozeane und der Atmosphäre (engl.: ocean and atmospheric loading)
$\Delta\mathbf{r}_{i,sol}, \Delta\mathbf{r}_{i,pol}$	Feste Erdgezeiten und Polgezeiten
$\Delta\mathbf{r}_{i,ant}$	Variationen des Antennenphasenzentrums, Deformation der Antenne und ähnliches (abhängig von der Beobachtungstechnik)

Mit den Ursachen und der Modellierung dieser Stationsbewegungen wollen wir uns im folgenden befassen. Eine Ausnahme bildet der Term $\Delta \mathbf{r}_{i,ant}$, den wir schon bei den einzelnen geodätischen Raumverfahren näher betrachtet haben (siehe Abschnitte 2.1.10, 2.2.7, 2.3.5).

Wenn man nur die *Relativpositionen* von Stationen gegenüber einer Referenzstation über kurze Basislinien bestimmt (z.B. mit GPS oder VLBI), so werden viele der eben aufgezählten Effekte durch die Differenzbildung fast vollständig eliminiert (gleiche Bewegung benachbarter Stationen) und daher oft nicht berücksichtigt. Für längere Basislinien oder gar globale Lösungen sind solche Vernachlässigungen nicht mehr zulässig, wenn man an Stationskoordinaten im Zentimeter-Bereich interessiert ist.

3.1.1 Plattentektonik

Die Bewegung der globalen Kontinentalplatten, auch Kontinentaldrift genannt, wurde bereits vom deutschen Polarforscher und Geophysiker Alfred Wegener (1880–1930) im Jahre 1912 postuliert. Es handelt sich dabei um eine über Jahrmillionen weitgehend gleichförmige Verschiebung der tektonischen Platten. Diese Plattenbewegungen können unabhängig von den Messungen der geodätischen Raumverfahren aus *geophysikalischen Daten* gewonnen werden (wie z.B. aus dem paläomagnetischen Streifenmuster der Ozeanböden, “hot spots”, Verschiebungsvektoren von Erdbeben, . . . , siehe [DeMets et al., 1990]). Die daraus berechneten Modelle beschreiben die Bewegung einer Platte als *Rotation* einer *festen* Platte um ihren Rotationspol auf der Oberfläche der kugelförmigen Erde. Die zeitliche Entwicklung der Koordinaten $\mathbf{r}_{i,pla}(t)$ einer Station i , die sich auf der Platte k befindet, kann — für kurze Zeiträume im Vergleich zur Rotationsperiode — ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i,pla}(t) &= \mathbf{r}_{i,e}(t_0) + \mathbf{v}_{i,e}(t - t_0) \\ &= \mathbf{r}_{i,e}(t_0) + (\boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{r}_{i,e}(t_0)) (t - t_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei $\boldsymbol{\omega}^k = (\omega_x^k, \omega_y^k, \omega_z^k)$ der *Winkelgeschwindigkeitsvektor* ist, der die Rotation der Platte eindeutig beschreibt. Die Stationsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{i,e}$ ist gegeben durch die Rotationsgeschwindigkeit zur Zeit t_0 :

$$\mathbf{v}_{i,e} = \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{r}_{i,e}(t_0). \quad (3.3)$$

Die neuesten Modelle werden *Nuvel-1A* und *NNR-Nuvel-1A* genannt [DeMets et al., 1994]. Dabei steht *NNR* für die bei der Berechnung des Modells verwendete *No-Net-Rotation*-Bedingung:

$$\sum_{Erde} \mathbf{v} \times \mathbf{r} = 0 \quad (3.4)$$

Diese NNR-Bedingung wird später im Abschnitt 3.2.2 behandelt werden. Das NNR-Nuvel-1A-Modell unterscheidet *16 verschiedene Platten* und wird für die *Datumsdefinition des ITRS* (International Terrestrial Reference System) verwendet. Es ist aus dem Vorgängermodell *NNR-Nuvel-1* entstanden, indem man die Geschwindigkeiten

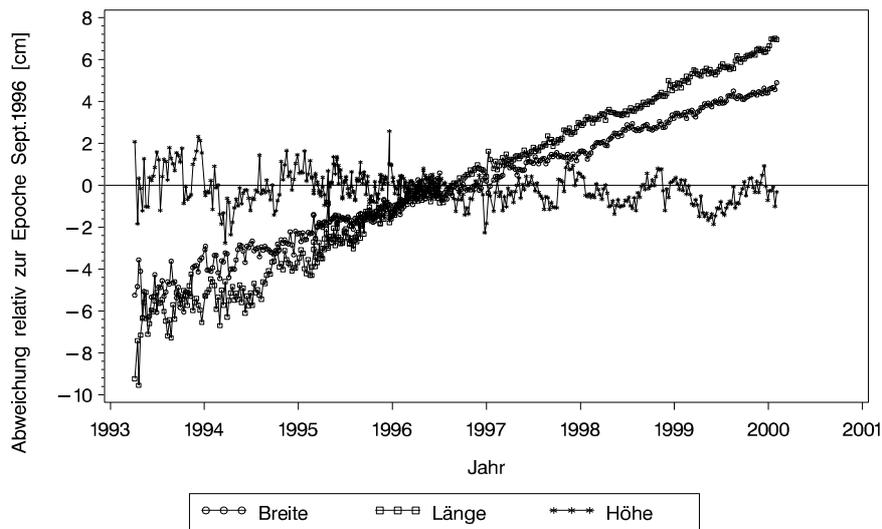


Abb. 3.1: Globale Bewegung von Wettzell aus GPS-Lösungen von 7 Jahren.

wegen einer Revision der paläomagnetischen Zeitskala um den Faktor 0.9562 korrigiert hat.

Obschon diese Plattenmodelle auf geophysikalischen Daten beruhen, die einen Zeitraum von vielen Millionen Jahren umfassen, stellen sie doch die *heutigen*, aus den geodätischen Raumverfahren gewonnenen Plattenbewegungen (siehe Bewegung der Station Wettzell in Abbildung 3.1 als Beispiel) sehr gut dar. Abbildung 3.2 zeigt die Stationsbewegungen, die am CODE Analyse-Zentrum des IGS in Bern aus den globalen GPS-Daten von 7 Jahren berechnet wurden. Sehr schön sieht man, dass es sich bei den Plattenbewegungen um Rotationen und nicht einfach um Verschiebungen handelt. In Abbildung 3.3 sind die Geschwindigkeitsunterschiede zum Modell NNR-Nuvel-1A dargestellt. Für die meisten Stationen gibt das Modell NNR-Nuvel-1A die Plattenbewegung sehr gut wieder. Unterschiede ergeben sich vor allem an Plattengrenzen und für isolierte Inseln.

3.1.2 Feste Erdzeiten

Die Erde ist kein starrer Körper, sondern verformt sich aufgrund der Gravitationskräfte anderer massiver Körper, insbesondere der Sonne und des Mondes. Diese Bewegungen werden *Gezeiteneffekte* genannt. \mathbf{r}_p sei die geozentrische Position und m_p die Masse eines Himmelskörpers (z.B. Mond oder Sonne). Das von diesem Körper verursachte Gravitationspotential für einen Punkt \mathbf{r} auf der Erde kann geschrieben werden als

$$V(\mathbf{r}) = G \frac{m_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \quad (3.5)$$

CODE global velocities based on 7 years of data (GPS weeks 0691--1047)



Abb. 3.2: Globale Geschwindigkeiten aus GPS (7-Jahres-Lösung von CODE).

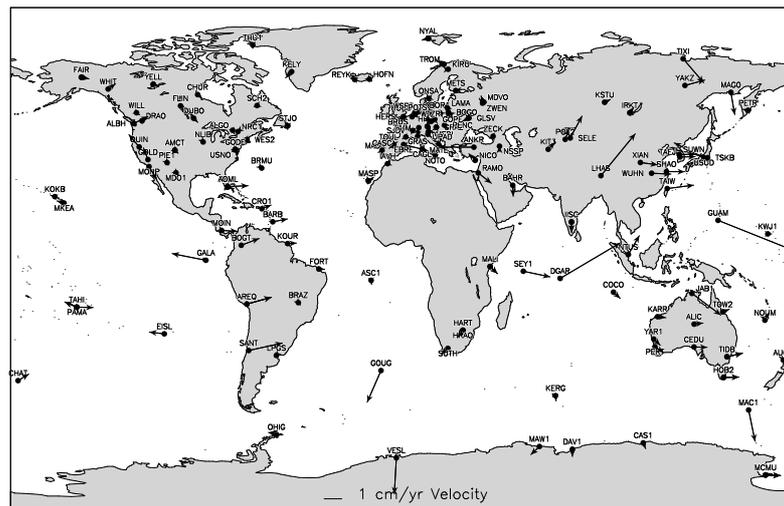


Abb. 3.3: Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten aus GPS und dem Modell NNR-Nuvel-1A.

Dabei ist G die Gravitationskonstante. Mit $r_p = |\mathbf{r}_p|$, $r = |\mathbf{r}|$ und dem Winkel β zwischen den zwei Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}_p ergibt sich für das Potential $V(\mathbf{r})$:

$$V(\mathbf{r}) = G \frac{m_p}{\sqrt{r_p^2 - 2 r r_p \cos \beta + r^2}} = G \frac{m_p}{r_p} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{r_p} \right) \cos \beta + \left(\frac{r}{r_p} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.6)$$

Dabei kann $\cos \beta$ auch als Skalarprodukt geschrieben werden:

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_p}{r r_p} \quad (3.7)$$

Die Entwicklung des inversen Abstandes $1/r$ in (3.6) in *Legendre-Polynome* führt zu

$$V(\mathbf{r}) = G \frac{m_p}{r_p} \left[1 + \left(\frac{r}{r_p} \right) P_1(\cos \beta) + \left(\frac{r}{r_p} \right)^2 P_2(\cos \beta) + \left(\frac{r}{r_p} \right)^3 P_3(\cos \beta) + \dots \right] \quad (3.8)$$

mit

$$\begin{aligned} P_1(\cos \beta) &= \cos \beta \\ P_2(\cos \beta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \beta - 1) \\ P_3(\cos \beta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das eigentliche zeitlich veränderliche, *gezeitenerzeugende Potential* $\Delta V(\mathbf{r})$ ist durch die Terme vom Grad 2 und höher gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{r}) &= G \frac{m_p}{r_p} \left[\left(\frac{r}{r_p} \right)^2 P_2(\cos \beta) + \left(\frac{r}{r_p} \right)^3 P_3(\cos \beta) + \dots \right] \\ &= \Delta V_2 + \Delta V_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mit diesem Potential können wir nun die Verschiebung der Station im Punkt \mathbf{r} aufgrund der vom Körper in \mathbf{r}_p verursachten Gezeiten der festen Erde berechnen. In einem lokalen Koordinatensystem (UEN: Up, East, North; Reihenfolge ergibt ein Rechtssystem) gilt für diese Deformation $\Delta_{sol} = (\Delta_u, \Delta_e, \Delta_n)$:

$$\Delta_u = \frac{h_2}{g} \Delta V_2 + \frac{h_3}{g} \Delta V_3 \quad (3.11a)$$

$$\Delta_e = \frac{l_2}{g \cos \phi} \frac{\partial \Delta V_2}{\partial \lambda} + \frac{l_3}{g \cos \phi} \frac{\partial \Delta V_3}{\partial \lambda} \quad (3.11b)$$

$$\Delta_n = \frac{l_2}{g} \frac{\partial \Delta V_2}{\partial \phi} + \frac{l_3}{g} \frac{\partial \Delta V_3}{\partial \phi} \quad (3.11c)$$

mit

ϕ Geographische Breite der Station

λ Geographische Länge der Station

h_i Lovesche Zahlen (i=2,3) für die vertikale Deformation

l_i Shidasche Zahlen (i=2,3) für die horizontale Deformation

g Gravitationsbeschleunigung auf der Erdoberfläche, also $g = G m_e / r^2$

Die Loveschen und Shidaschen Zahlen bilden das Bindeglied zwischen einer Potentialänderung und der daraus resultierenden Änderung der Stationsposition. Ungefähre

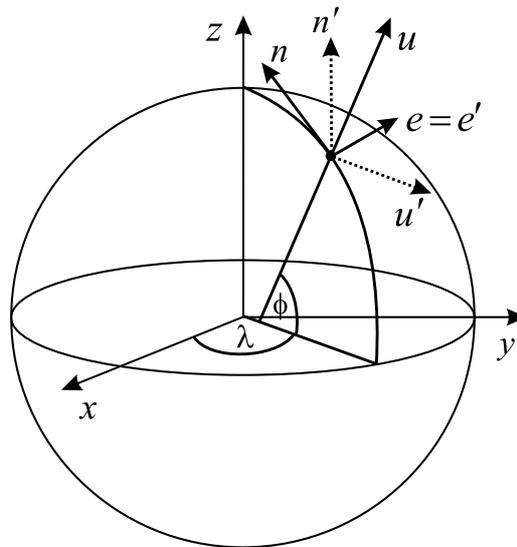


Abb. 3.4: Transformation vom lokalen UEN-System in ein geozentrisches System.

numerische Werte:

$$\begin{pmatrix} h_2 = 0.612 & l_2 = 0.086 \\ h_3 = 0.293 & l_3 = 0.015 \\ h_4 = 0.179 & l_4 = 0.011 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Mit den Beziehungen (3.10) und (3.11) lässt sich der Deformationsvektor Δ_{sol} explizit berechnen. Er muss lediglich noch mit zwei Rotationsmatrizen (Drehungen um ϕ und λ) von einem lokalen in ein erdfestes System transformiert werden (vgl. Abb. 3.4), um den endgültigen Gezeitenvektor $\Delta \mathbf{r}_{i,sol}$ zu erhalten (siehe (3.1)):

$$\Delta \mathbf{r}_{i,sol} = \mathbf{R}_3(-\lambda) \mathbf{R}_2(+\phi) \Delta_{sol} \quad (3.13)$$

Eine direkte Berechnung in einem erdfesten System ist auch möglich: mit den äquivalenten Formeln, die in den *IGRS Conventions 1996*, Seite 61, gegeben sind. Hier als Beispiel der Term 2. Grades:

$$\Delta \mathbf{r}_{i,sol,2} = \frac{Gm_p r^4}{Gm_e r_p^3} \left[h_2 \mathbf{e}_r \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \right) + 3l_2 \cos \beta \{ \mathbf{e}_p - \cos \beta \mathbf{e}_r \} \right] \quad (3.14)$$

mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ und $\mathbf{e}_p = \mathbf{r}_p/r_p$.

Übung: Zeigen Sie, dass man die ersten Terme auf der rechten Seite der Formeln (3.11) und die Formel (3.14) ineinander überführen kann.

Die Gesamtdeformation erhält man wieder als Summe der Terme:

$$\Delta \mathbf{r}_{i,sol} = \Delta \mathbf{r}_{i,sol,2} + \Delta \mathbf{r}_{i,sol,3} \quad (3.15)$$

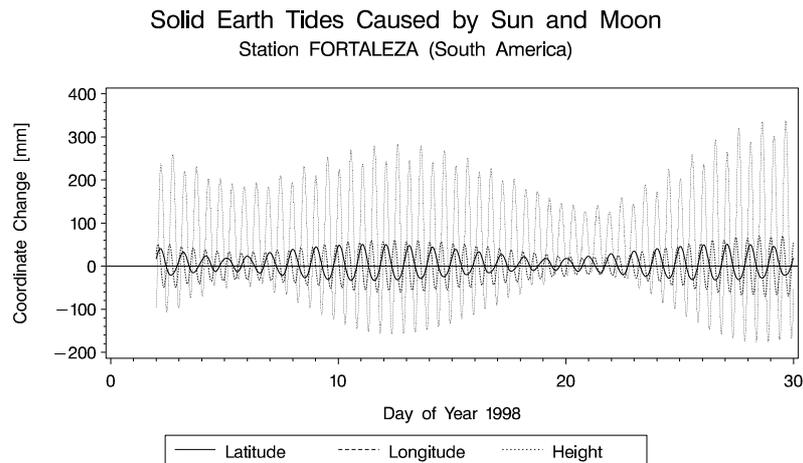


Abb. 3.5: Stationsbewegung aufgrund der festen Erdzeiten für Fortaleza (Brasilien).

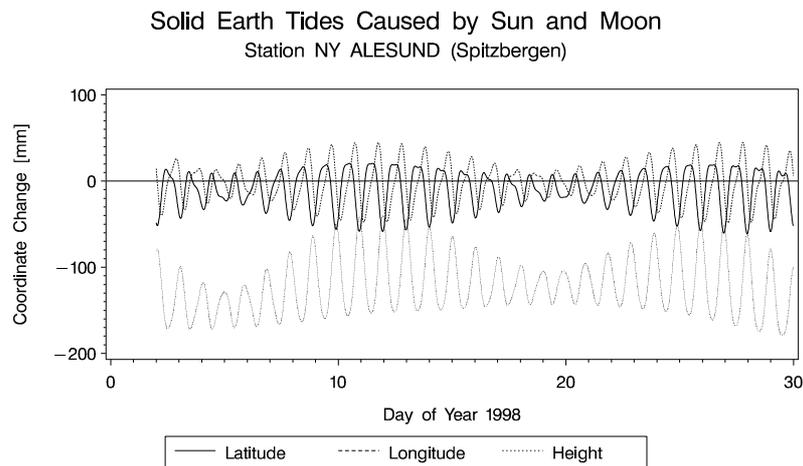


Abb. 3.6: Stationsbewegung aufgrund der festen Erdzeiten für Ny Alesund (Spitzbergen).

Für die Gezeiten 2. Grades (mit h_2 und l_2) müssen die Beiträge von Mond und Sonne berücksichtigt werden. Für den Term 3. Grades genügt die Berechnung des Mondeinflusses.

Die obigen Formeln enthalten noch nicht das vollständige Gezeitenmodell der IERS Conventions 1996. Zusätzlich muss für hohe Genauigkeitsansprüche berücksichtigt werden, dass die Loveschen und Shidaschen Zahlen von der *geographischen Breite* und von der *Frequenz* abhängen und dass die Erde nicht vollständig elastisch reagiert (kleine Verzögerung der Deformation gegenüber dem erzeugenden Potential).

Als Beispiel zeigen die Abbildungen 3.5 und 3.6 die festen Erdzeiten für zwei Stationen in unterschiedlicher geographischer Breite (Fortaleza in Brasilien, Ny Alesund

auf Spitzbergen). Deutlich sieht man die halbtäglichen, täglichen und monatlichen Schwankungen. Die Erdgezeiten für die Station Ny Alesund machen klar, dass die Gezeitendeformation im Mittel nicht null sein muss (permanente Gezeitendeformation).

3.1.3 Polgezeiten

Bei dieser Stationsverschiebung handelt es sich um einen Effekt zweiter Ordnung (bis zu 1.5 cm), nämlich um die Reaktion der elastischen Erde auf die Änderung der Stellung der Erdachse aufgrund der Polschwankung (kreisähnliche Bewegung mit etwa 15 m Durchmesser). Wenn sich die Rotationsachse verändert, dann ändern sich auch die Zentrifugalkräfte (Scheinkräfte im mitrotierenden System), die die Erde zu einem Ellipsoid verformen. Das Zentrifugalpotential, das durch die Erdrotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ verursacht wird, hat die Form

$$V_z = \frac{1}{2} [\boldsymbol{r}^2 \boldsymbol{\omega}^2 - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2] \quad (3.16)$$

Gleichung (3.16) lässt sich aus der elementaren Beziehung $V_z = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}_\perp^2$ herleiten, wobei \boldsymbol{r}_\perp den Vektor bezeichnet, der senkrecht von der Rotationsachse zum Punkt \boldsymbol{r} zeigt.

Für die Änderung des Potentials aufgrund der sich ändernden Stellung der Erdachse gilt in erster Näherung

$$\Delta V_z = -\frac{\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}^2}{2} \sin(2\phi) (\delta x \cos \lambda - \delta y \sin \lambda) \quad (3.17)$$

Dabei sind δx , δy die Abweichungen der Polkoordinaten von einem mittleren Pol (gemittelt über lange Zeiträume).

Analog zu den Gleichungen (3.11) gelten wieder dieselben Beziehungen zwischen Potentialänderung und Positionsänderung der Station:

$$\Delta_u = \frac{h}{g} \Delta V_z \quad (3.18a)$$

$$\Delta_e = \frac{l}{g \cos \phi} \frac{\partial \Delta V_z}{\partial \lambda} \quad (3.18b)$$

$$\Delta_n = \frac{l}{g} \frac{\partial \Delta V_z}{\partial \phi} \quad (3.18c)$$

Daraus folgt für die Deformation $\Delta \boldsymbol{r}_{i,pol}$ aufgrund der Polgezeiten (siehe (3.1)):

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{r}_{i,pol} = & -\frac{\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}^2}{g} \cdot [h \sin \phi \cos \phi (\delta x \cos \lambda - \delta y \sin \lambda) \boldsymbol{e}_r + \\ & l \sin \phi (-\delta x \sin \lambda - \delta y \cos \lambda) \boldsymbol{e}_\lambda + \\ & l \cos 2\phi (\delta x \cos \lambda - \delta y \sin \lambda) \boldsymbol{e}_\phi] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dabei sind e_r, e_λ, e_ϕ Einheitsvektoren in den Richtungen UEN (Up, East, North).

Für die Loveschen und Shidaschen Zahlen h und l in (3.18) und (3.19) müssen andere Werte verwendet werden als in (3.11), weil es sich hier um langperiodische Variationen handelt: $h = 0.6027, l = 0.0836$.

3.1.4 Auflasteffekte der Ozeane

Die Stationsbewegung aufgrund der Auflasteffekte der Ozeane kommt dadurch zustande, dass die Wassermassen bei Flut auf die Kontinentalplatte drücken und damit die Stationen auf der Platte verschieben. Der Haupteffekt besteht in einer Höhenänderung (einige Zentimeter) vor allem für küstennahe Stationen und Stationen auf Inseln. Die Auflasteffekte führen jedoch auch zu kleinen horizontalen Deformationen (einige Millimeter).

Die Komponenten δ_j (UEN für $j=1,2,3$) der Deformation aufgrund der Auflasteffekte der Ozeane werden berechnet gemäss

$$\delta_j = \sum_{i=1}^N \xi_{ij} \cos(\omega_i t + V_i - \phi_{ij}) \quad (3.20)$$

Wir wollen hier nur die allgemeine Struktur anschauen, da eine detaillierte Betrachtung zu weit führen würde. Die Kreisfrequenz ω_i eines Gezeitenterms i und das Argument V_i hängen nur von den Ephemeriden von Mond und Sonne ab, genauer von den 5 Fundamentalargumenten F_k ($k=1, \dots, 5$) (auch *Delauney-Variablen* genannt) und der Sternzeit θ ($F_6 = \theta + \pi$):

- $F_1 = l, F_2 = l'$: Mittlere Anomalie des Mondes und der Sonne
- $F_3 = F = L - \Omega$: Argument der Breite des Mondes, wobei L die mittlere Länge des Mondes bezeichnet.
- $F_4 = D$: Mittlere Elongation des Mondes von der Sonne
- $F_5 = \Omega$: Mittlere Länge des Mondknotens
- $F_6 = \theta + \pi$: Mittlere Sternzeit θ in Greenwich

ω_i und V_i können relativ einfach berechnet werden:

$$\psi(t) = \omega_i t + V_i = \sum_{k=1}^6 N_{ik} F_k(t) \quad (3.21)$$

Die N_{ik} sind ganzzahlige Multiplikatoren und die Kreisfrequenz ω_i ist gegeben durch

$$\omega_i = \frac{d\psi}{dt} \quad (3.22)$$

Die Amplituden ξ_{ij} und die Phasenverschiebungen ϕ_{ij} in (3.20) müssen jedoch aus Modellen der Meereszeiten und der daraus resultierenden Deformation der Kontinentalplatten errechnet werden. Heute werden bis zu 11 Gezeitenterme (Frequenzen) berücksichtigt, nämlich

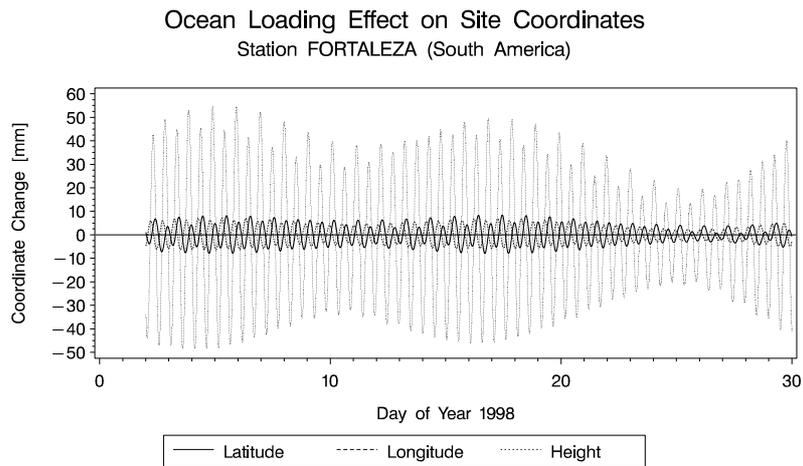


Abb. 3.7: Stationsbewegung aufgrund der Auflasteffekte der Ozeane für Fortaleza (Brasilien).

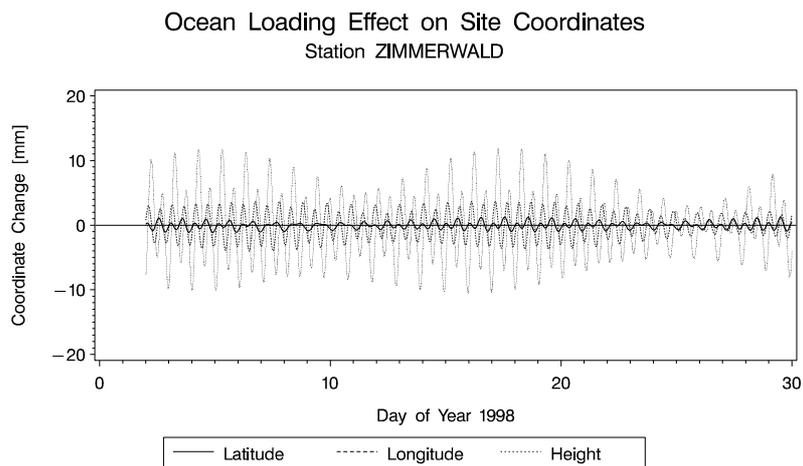


Abb. 3.8: Stationsbewegung aufgrund der Auflasteffekte der Ozeane für Zimmerwald (Schweiz).

- K_2, S_2, M_2, N_2 : Perioden in der Nähe von 12 Stunden
- K_1, P_1, O_1, Q_1 : Perioden in der Nähe von 24 Stunden
- M_f, M_m, S_{sa} : 14-tägige, monatliche und halbjährliche Periode

Die aus solchen Modellen berechneten Auflasteffekte für die Stationen Fortaleza (Küste von Brasilien) und Zimmerwald (Schweiz) sind in den Abbildungen 3.7 und 3.8 dargestellt. Die Variationen sind kleiner als bei den festen Erdzeiten, zeigen aber dieselben Perioden (durch Mond und Sonne bedingt). Obschon Zimmerwald nicht in der Nähe eines Meeres liegt, sind noch Variationen von bis zu 1 cm vorhanden.

3.1.5 Auflasteffekte der Atmosphäre

Auch die Atmosphäre hat eine Masse und drückt auf die Kontinentalplatten. Bei Hochdruck (schwerere Atmosphäre) sinken die Stationen im Hochdruckgebiet etwas ab. Der Effekt kann maximal etwa 2 cm in der Höhe betragen. [Rabbel and Schuh, 1986] haben ein einfaches Modell vorgeschlagen, um den Zusammenhang zwischen der vertikalen Verschiebung Δh der Station (in mm) und der Druckverteilung zu erfassen:

$$\Delta h = -0.35\Delta p - 0.55\bar{p} \quad (3.23)$$

Dabei ist \bar{p} die mittlere Druckanomalie in einem kreisförmigen Gebiet mit Radius $R = 2000$ km um die Station herum (in mbar) und Δp die lokale Druckanomalie $\Delta p = p - p_{std}$ (in mbar). p ist der auf der Station gemessene Druck und p_{std} berechnet sich nach

$$p_{std} = 1013.25 e^{-h/8.567} \quad (3.24)$$

mit der Stationshöhe h (in km) relativ zum Referenzellipsoid. Mit der Transformation (3.13) lässt sich die Höhenkorrektur Δh in das erdfeste System umrechnen:

$$\Delta \mathbf{r}_{i,atm} = \mathbf{R}_3(-\lambda)\mathbf{R}_2(+\phi) \begin{pmatrix} \Delta h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.1.6 Regionale und lokale Deformationen

Als weitere regionale und lokale Deformationen seien noch erwähnt:

- Die schwierig zu erfassenden tektonischen Deformationen in der Nähe der Plattengrenzen.
- Die Verschiebungen aufgrund von Erdbeben (sowohl während als auch nach dem Erdbeben: *coseismic* und *postseismic*).
- Der "Postglacial Rebound", d.h. das langsame sich Heben der Erdkruste (Skandinavien, Grönland, Kanada) seit dem Abschmelzen der Eiskappen.
- Instabilität der vermarkten Punkte infolge lokaler Veränderungen.

3.2 Bestimmung von Stationskoordinaten

Die Stationskoordinaten werden genau wie andere Parameter mit Hilfe der Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate oder Kalmanfilter) bestimmt. Für eine gewöhnliche Parameterbestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\hat{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.26)$$

$$= \mathbf{b} + \mathbf{v} \quad (3.27)$$

$$= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{Linearisierung}) \quad (3.28)$$

und folglich

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{b} - \psi(\mathbf{x}_0)) \quad (3.29)$$

$$= \mathbf{A} \Delta \hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\ell} \quad (3.30)$$

mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \Delta \hat{\mathbf{x}} \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{b} - \psi(\mathbf{x}_0) \quad (3.32)$$

wobei

ψ Modellfunktion (mathematischer Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Parametern)

$\hat{\mathbf{b}}$ Spaltenvektor der ausgeglichenen Beobachtungen

\mathbf{b} Spaltenvektor der Beobachtungen

$\boldsymbol{\ell}$ Spaltenvektor der Absolutglieder (Widerspruchsvektor)

$\hat{\mathbf{x}}$ Geschätzte Parameter

\mathbf{x}_0 Näherungswerte der Parameter

$\Delta \hat{\mathbf{x}}$ Verbesserungen der a priori Parameterwerte

\mathbf{v} Verbesserungen (Residuen) der Beobachtungen

\mathbf{A} Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen

Die Jacobi-Matrix \mathbf{A} ist definiert durch

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \psi(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right) \quad (3.33)$$

Das stochastische Modell der Beobachtungen ist durch die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{K}_{bb} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{bb} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{bb}^{-1} \quad (3.34)$$

gegeben. Dabei ist σ_0^2 der a priori Varianzfaktor der Beobachtungen, \mathbf{Q}_{bb} die Kofaktormatrix der Beobachtungen und \mathbf{P}_{bb} die Gewichtsmatrix der Beobachtungen. Die Lösung des Gleichungssystems (3.30) folgt aus der Bedingung der kleinsten Quadratsumme:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{v} = \text{minimal} \quad (3.35)$$

und lautet

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \boldsymbol{\ell} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \boldsymbol{\ell}' \quad (3.36)$$

wobei

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} = \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{A} \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{bb} \boldsymbol{\ell} \quad (3.38)$$

$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ nennt man Kofaktormatrix der Parameter und N die Normalgleichungsmatrix. Den a posteriori RMS (mittlerer Fehler der Gewichtseinheit) $\hat{\sigma}_0$ berechnet man nach

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{bb} \mathbf{v}}{n - u}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\ell}^T \mathbf{P}_{bb} \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\Delta} \hat{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\ell}'}{n - u}} \quad (3.39)$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungen und u die Anzahl der unbekannt Parameter bezeichnet. Für die Kovarianzmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\hat{x}\hat{x}}$ der Parameter gilt dann:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \quad (3.40)$$

Kehren wir nach dieser Repetition der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Stationskoordinaten zurück. Neben der Beobachtungsgleichung für die jeweilige Beobachtungstechnik (siehe (2.22), (2.43), (2.62), (2.69)) benötigen wir für die Berechnung des Gleichungssystems (3.30) noch die Matrix \mathbf{A} (Jacobi-Matrix), d.h. die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgrösse nach den zu bestimmenden Parametern, in unserem Falle also nach den Stationskoordinaten im erdfesten System.

3.2.1 Partielle Ableitungen der Beobachtungen nach den Stationskoordinaten

Exemplarisch für alle Beobachtungstechniken sollen hier die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung der GPS-Phasenmessungen L_E^S nach den Stationskoordinaten $\mathbf{r}_{E,e}$ im erdfesten System (siehe (2.46)) berechnet werden. In der Beobachtungsgleichung (2.43)

$$L_E^S = \left| \mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S) \right| + \delta\rho_{trp} + \delta\rho_{ion} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{mul} + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda (N_E^S + \alpha_E - \alpha^S) + \epsilon_E^S \quad (3.41)$$

kommen die Stationskoordinaten zentral im Distanz-Term

$$r_E^S = \left| \mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S) \right| \quad (3.42)$$

vor. Dass sie mehr oder weniger explizit auch noch in den Termen $\delta\rho_{trp}$, $\delta\rho_{ion}$ (Stationshöhe) und $\delta\rho_{rel}$ enthalten sind, können wir bei der Berechnung der partiellen Ableitungen vernachlässigen, da diese Korrekturterme gegenüber dem Hauptterm sehr klein sind. Es gilt also nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \mathbf{r}_{E,e}} = \frac{\partial r_E^S}{\partial \mathbf{r}_E} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_E}{\partial \mathbf{r}_{E,e}} \quad (3.43)$$

Für die i -te Komponente $r_{E,e}^i$ des Vektors $\mathbf{r}_{E,e}$ bedeutet dies (ausgeschrieben):

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial r_{E,e}^i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial r_E^S}{\partial r_E^k} \cdot \frac{\partial r_E^k}{\partial r_{E,e}^i} \quad (3.44)$$

Die Berechnung der zwei Terme in (3.43) erfolgt in Matrixschreibweise mit

$$\frac{\partial \mathbf{r}_E}{\partial \mathbf{r}_{E,e}} = \mathbf{PNUXY} \quad (3.45)$$

und

$$\frac{\partial r_E^S}{\partial \mathbf{r}_E} = \frac{\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)}{\rho_E^S} = -\mathbf{e}_E^S \quad (3.46)$$

mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_E^S von der Station zum Satelliten. In Komponentenschreibweise lauten diese zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial r_E^k}{\partial r_{E,e}^i} = (\mathbf{PNUXY})_{ki} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial r_E^S}{\partial r_E^k} = \frac{r_E^k(t_E) - r^{S,k}(t_E - \tau_E^S)}{\rho_E^S} = -e_E^{S,k} \quad (3.48)$$

Dass genau genommen die Stationskoordinaten auch noch in der Lichtlaufzeit τ_E^S stecken, die in der Distanz r_E^S vorkommt (siehe (3.42)), haben wir vernachlässigen können.

In analoger Art können wir auch die partiellen Ableitungen nach den Stationskoordinaten für die Beobachtungsgleichungen der anderen Techniken herleiten.

3.2.2 Datumsdefinition und Systembedingungen

Oft können mit den Beobachtungen eines geodätischen Raumverfahrens nicht die Koordinaten *aller* Stationen gleichzeitig bestimmt werden, da Information zur Datumsdefinition fehlt oder nur schwach vorhanden ist. Beispiele sind:

- In einem lokalen oder regionalen GPS-Netz können mit den Phasenmessungen nur Relativkoordinaten bestimmt werden. Die geozentrische Lagerung des Netzes ist durch die Beobachtungen nur sehr ungenau bestimmt. Gewöhnlich werden deshalb die Koordinaten einer Station fixiert (nicht als unbekannte Parameter bestimmt), um den Datumsdefekt zu korrigieren.
- Bei globalen GPS-Lösungen mit Schätzen von Stationskoordinaten, Bahnen und Erdrotationsparametern können die Stationskoordinaten zusammen mit den Bahnen um kleine Winkel rotiert werden, ohne dass die innere Geometrie (Geometrie zwischen Satellitenpositionen und Stationspositionen) und damit die Lösung verändert wird. Ein Bezug zu Objekten ausserhalb der Erde (d.h. zu einem raumfesten Referenzsystem) besteht nur über die Gravitationseinflüsse von Mond und Sonne (und Planeten) sowie durch den Strahlungsdruck der Sonne.
- Auch bei SLR-Auswertungen können die Stationen und Bahnen gemeinsam um kleine Winkel rotiert werden, ohne dass dadurch die innere Geometrie verändert wird.

- VLBI-Beobachtungen enthalten keine Information über die absolute Z-Komponente der Stationen im geozentrischen System.

Eine elegante Möglichkeit, solche Datumsdefekte zu beheben, ohne einzelne Stationen oder Stationskoordinaten zu fixieren, besteht in der Einführung von Datumsbedingungen (Systembedingungen, free network conditions). Solche Datumsbedingungen basieren auf der Annahme, dass wir es mit zwei unterschiedlichen Referenzsystemen zu tun haben:

- das Referenzsystem, in dem die a priori Koordinaten der Stationen gegeben sind, und
- das Referenzsystem der geschätzten Stationskoordinaten (mit Tilde bezeichnete Variablen).

Die Koordinaten $\tilde{\mathbf{X}}_i = (\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i)^T$ und $\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^T$ einer Station i in den beiden Referenzsystemen sind durch eine Helmert-Transformation (7-Parameter-Transformation) miteinander verknüpft:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ \tilde{Z}_i \end{pmatrix} = (1 + \mu) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Dabei haben wir angenommen, dass nur kleine Rotationswinkel α , β und γ vorliegen (Linearisierung). Datumsdefekte können nun behoben werden, indem man verlangt, dass die dem Datumsdefekt entsprechenden Transformationsparameter null sein müssen. Man erreicht dadurch eine Einbettung der geschätzten Stationskoordinaten in das Referenzsystem, das durch die a priori Koordinaten definiert wird. Wir können Gleichung (3.49) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ \tilde{Y}_i \\ \tilde{Z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_i & Y_i & X_i \\ 0 & 1 & 0 & Z_i & 0 & -X_i & Y_i \\ 0 & 0 & 1 & -Y_i & X_i & 0 & Z_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mu \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

In Matrixschreibweise lautet Gleichung (3.50) für die Station i :

$$\tilde{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\xi} \quad (3.51)$$

Wenn wir noch die übergeordneten Vektoren $\tilde{\mathbf{X}}$ und \mathbf{X} sowie die Matrix \mathbf{B} einführen gemäss

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

so können wir die 7 Parameter $\boldsymbol{\xi}$ der Transformation mit der folgenden Beobachtungsgleichung bestimmen, wobei die geschätzten Koordinaten $\tilde{\mathbf{X}}$ die Rolle von Pseudo-Beobachtungen übernehmen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi} - (\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \quad (3.53)$$

Daraus erhalten wir das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{B}^T (\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) \quad (3.54)$$

Bezeichnen wir mit

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X} \quad (3.55)$$

die Differenz zwischen den geschätzten und den a priori Koordinaten, so sind die Transformationsparameter gegeben durch

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{x} \quad (3.56)$$

Systembedingungen können nun bei der Bestimmung der Stationskoordinaten durch die folgenden Pseudo-Beobachtungen berücksichtigt werden:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

Da die Matrix $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ regulär (invertierbar) ist, können wir vereinfachend fordern:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

Mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ für die Pseudo-Beobachtungen gemäss (3.58) und der Gewichtsmatrix \mathbf{P} für diese Pseudo-Beobachtungen erhalten wir aufgrund der Systembedingungen den folgenden Beitrag $\Delta \mathbf{N}$ zur Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} für die Bestimmung der Stationskoordinaten:

$$\Delta \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{P} \mathbf{B}^T \quad (3.59)$$

In lokalen GPS-Netzen genügt es bei bekannten Bahnen, Bedingungen für die 3 Translationen einzuführen, bei globalen GPS- oder SLR-Lösungen mit Bahnbestimmung müssen dagegen Bedingungen für die 3 Rotationen angebracht werden, um die Datumsdefekte zu beheben.

Analoge Systembedingungen können auch bei der Schätzung von *Stationsgeschwindigkeiten* aufgesetzt werden. Falls Bedingungen für die 3 Rotationsgeschwindigkeiten $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ angebracht werden, so spricht man von einer *No-Net-Rotation-Bedingung* zwischen den geschätzten und den a priori Geschwindigkeiten.

4. Signalausbreitung in der Atmosphäre

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Ausbreitung der Signale in der Atmosphäre befassen. Allen geodätischen Raumverfahren ist gemeinsam, dass die verwendeten Signale (elektromagnetische Wellen) mindestens einmal durch die Atmosphäre hindurchlaufen und dabei verzögert oder beschleunigt, abgelenkt und abgeschwächt werden.

Nach einer Einführung in die Grundlagen der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und in den Aufbau der Atmosphäre werden wir uns mit den zwei wichtigsten Teilen der Atmosphäre, nämlich der *Ionosphäre* und der *Troposphäre* befassen, ihren Einfluss auf die Messungen der Beobachtungstechniken behandeln, Modellierungsmöglichkeiten aufzeigen und erläutern, wie durch die Bestimmung geeigneter atmosphärischer Parameter aus den Beobachtungen nicht nur der störende Einfluss der Atmosphäre auf andere Parameter (Koordinaten, Erdrotation, Bahnen, ...) reduziert, sondern umgekehrt auch wichtige Information über den Zustand der Atmosphäre selbst gewonnen werden kann.

4.1 Grundlagen der Wellenausbreitung

4.1.1 Mathematische Beschreibung

Eine Welle, die sich in x-Richtung ausbreitet (z.B. eine elektromagnetische Welle, d.h. die Schwingungen des elektromagnetischen Feldes), kann mathematisch beschrieben werden durch

$$\Psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \phi_0) \quad (4.1)$$

Dabei bedeuten

$\Psi(x, t)$	Grösse der Schwingung im Punkt x zur Zeit t
A	Amplitude der Schwingung (grösster Betrag)
t	Zeit
ω	Kreisfrequenz der Schwingung
k	Wellenzahl der Schwingung
x	Ort auf der x-Achse
ϕ_0	Phasenwinkel der Schwingung zur Zeit $t = 0$ (im Bogenmass (Radiant))

Es handelt sich dabei um eine sogenannte *harmonische* Welle (oder Schwingung). Den Gesamtausdruck in der Klammer auf der rechten Seite von (4.1) nennt man den Phasenwinkel ϕ (in Radiant):

$$\phi = \omega t - kx + \phi_0 \quad (4.2)$$

Die sogenannte *Phase* Φ der Welle wird in *Zyklen* (dimensionslos) gemessen und berechnet sich aus dem Phasenwinkel ϕ nach

$$\Phi = \frac{\phi}{2\pi} \quad (4.3)$$

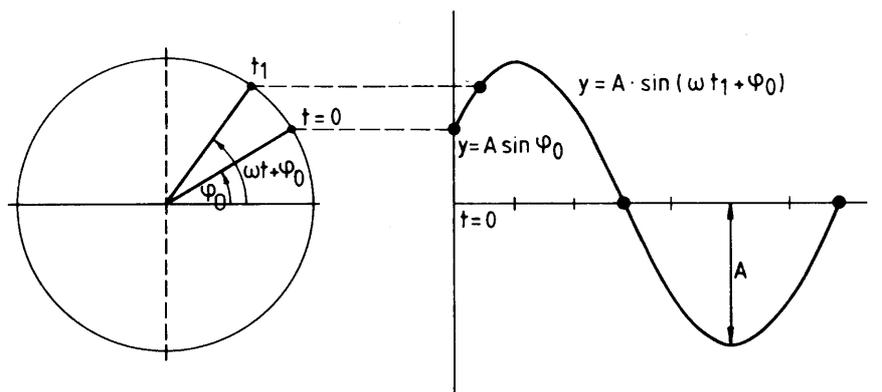


Abb. 4.1: Erzeugung einer harmonischen Schwingung mit einer Kreisbewegung [Kahmen, 1977].

Derselbe Zusammenhang besteht auch zwischen der eigentlichen Frequenz f (Schwingungen/Zyklen pro Zeiteinheit) und der Kreisfrequenz ω (Radiant pro Zeiteinheit):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.4)$$

Betrachten wir zum besseren Verständnis der Gleichung (4.1) zunächst die rein *zeitliche* Änderung der Grösse $\Psi(x, t)$ an einem bestimmten Ort, z.B. am Ort $x = 0$. Es gilt dann

$$\Psi(0, t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (4.5)$$

Die Grösse Ψ ändert sich also periodisch (siehe auch Abb. 4.1). Den Zeitunterschied T zwischen zwei Maxima einer Schwingung, der einem Phasenwinkelunterschied von 2π entspricht, nennt man *Periode*:

$$\text{aus } (\omega(t + T) + \phi_0) - (\omega t + \phi_0) = 2\pi \quad \text{folgt} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (4.6)$$

Für die *örtliche* Änderung der Grösse $\Psi(x, t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t , nehmen wir einfachheitshalber $t = 0$, gilt entsprechend

$$\Psi(x, 0) = A \sin(-kx + \phi_0) \quad (4.7)$$

Die Grösse Ψ ändert sich also periodisch mit der Distanz x . Den Distanzunterschied zwischen zwei Maxima einer Schwingung nennt man *Wellenlänge* λ . Man erhält sie mit

$$(-k(x - \lambda) + \phi_0) - (-kx + \phi_0) = 2\pi, \text{ woraus folgt: } \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (4.8)$$

Wir wollen nun noch die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{ph} der Welle aus (4.1) herleiten. Nehmen wir an, dass sich die Welle in einem kurzen Zeitintervall Δt um Δx

weiterbewegt hat. Das bedeutet, dass zur Zeit $t + \Delta t$ am Ort $x + \Delta x$ derselbe Phasenwinkel gelten muss wie zur Zeit t am Ort x . Also gilt gemäss (4.2):

$$\omega t - kx + \phi_0 = \omega(t + \Delta t) - k(x + \Delta x) + \phi_0 \quad (4.9)$$

Daraus folgt sofort

$$v_{ph} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = f \lambda = \frac{\lambda}{T} \quad (4.10)$$

Da es sich bei v_{ph} um die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase handelt, nennt man sie *Phasengeschwindigkeit*.

Vollständigkeithalber wollen wir noch die Verallgemeinerung der Gleichung (4.1) auf drei Dimensionen anfügen:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \phi_0) \quad (4.11)$$

Dabei wird aus der skalaren Wellenzahl k der Wellenvektor \mathbf{k} , dessen *Betrag* die *Anzahl Wellen pro Längeneinheit* (in Radiant pro Meter) angibt und dessen *Richtung* die *Ausbreitungsrichtung* der Welle beschreibt.

4.1.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Betrachten wir zwei Wellen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen f_1, f_2 und Wellenzahlen $k_1 = 2\pi/\lambda_1, k_2 = 2\pi/\lambda_2$:

$$\Psi_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad (4.12)$$

$$\Psi_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (4.13)$$

Dabei haben wir vereinfachend die Nullphase ϕ_0 null gesetzt. Unter Verwendung des Additionstheorems

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (4.14)$$

erhalten wir für die Überlagerung der zwei Wellen:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cdot \underbrace{\sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right)}_{(1)} \cdot \underbrace{\sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right)}_{(2)} \quad (4.15)$$

Es entsteht also ein Signal mit der Mischkreisfrequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ (siehe Term (1)) mit periodischen Amplitudenschwankungen (siehe Abb. 4.2) gemäss

$$A'(t) = 2A \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \quad (4.16)$$

Die Kreisfrequenz ω_{gr} der *Amplitudenschwankung*, d.h. der Gruppe, sieht man in Term (3), und die Wellenzahl der Gruppe (Breite der Gruppe) ist in Term (4) enthalten:

$$\omega_{gr} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (4.17)$$

$$k_{gr} = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (4.18)$$

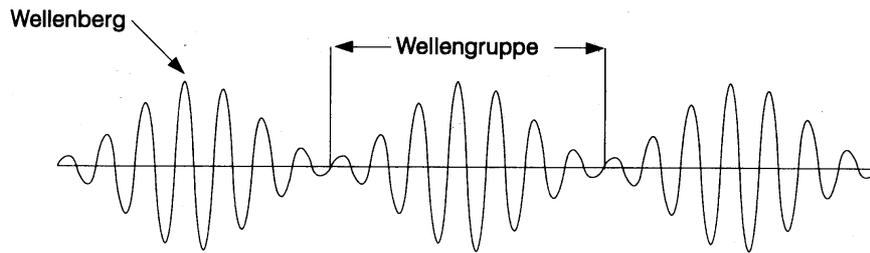


Abb. 4.2: Überlagerung zweier Schwingungen mit ähnlicher Frequenz [Bauer, 1997].

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dann nach (4.10) gegeben durch

$$v_{gr} = \frac{\omega_{gr}}{k_{gr}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{f_1 - f_2}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} = -\frac{f_1 - f_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{\Delta f}{\Delta \lambda} \lambda_1 \lambda_2 \quad (4.19)$$

Lassen wir den Frequenzunterschied $\Delta f = f_1 - f_2$ und den Wellenlängenunterschied $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ gegen null gehen, so folgt:

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda} \lambda^2 \quad (4.20)$$

Gemäss (4.10) gilt ferner

$$f = \frac{v_{ph}}{\lambda} \quad (4.21)$$

und folglich

$$df = -\frac{v_{ph}}{\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{\lambda} dv_{ph} \quad (4.22)$$

Diese Beziehung eingesetzt in (4.20) führt dann zu:

$$v_{gr} = -\frac{-\frac{v_{ph}}{\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{\lambda} dv_{ph}}{d\lambda} \lambda^2 = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \quad (4.23)$$

Dieser allgemeine Zusammenhang zwischen v_{ph} und v_{gr} heisst *Rayleigh-Gleichung*. Falls sich die Phasengeschwindigkeit v_{ph} mit der Wellenlänge nicht ändert (keine Dispersion), also $dv_{ph}/d\lambda = 0$, so folgt, dass Gruppen- und Phasengeschwindigkeit gleich gross sind, also $v_{gr} = v_{ph}$.

4.1.3 Spektrum der elektromagnetischen Wellen

Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen umfasst nahezu 20 Grössenordnungen (siehe Abb. 4.3). Davon werden in der Satellitengeodäsie aber nur zwei relativ enge Bereiche verwendet, nämlich im sichtbaren Licht ($0.4\text{--}0.8 \cdot 10^{15}$ Hz; SLR/LLR) und im Bereich der Mikrowellen ($10^7\text{--}10^{10}$ Hz; GPS/DORIS/VLBI/Altimetrie).

In der Nachrichtentechnik werden die Frequenzen in sogenannte *Frequenzbänder* eingeteilt (siehe Tabelle 4.1). In der Satellitengeodäsie sind die Namen der *Radarbänder* gebräuchliche Bezeichnungen (siehe Tabelle 4.2).

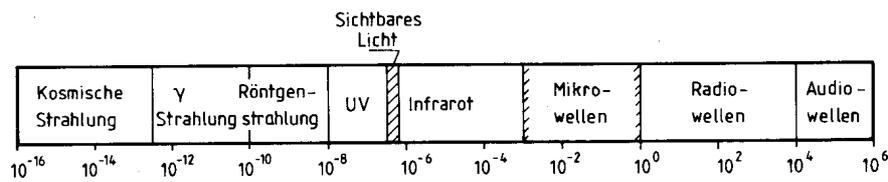


Abb. 4.3: Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen mit Wellenlängenangaben in Metern [Seeber, 1989].

Bezeichnung	Band	Wellenlänge λ	Frequenz f
Langwellen	LF	> 1000 m	< 300 kHz
Mittelwellen	MF	100–1000 m	300–3000 kHz
Kurzwellen	HF	10–100 m	3–30 MHz
Meterwellen	VHF	1–10 m	30–300 MHz
Ultrakurzwellen	UKW	10–100 cm	300–3000 MHz
Dezimeterwellen	SHF	1–10 cm	3–30 GHz
Zentimeterwellen	EHF	1–10 mm	30–300 GHz

Tabelle 4.1: Frequenzbänder

4.2 Aufbau der Atmosphäre

Zwei Bereiche der Atmosphäre sind wichtig für die Ausbreitung der hier betrachteten Signale (siehe Abb. 4.4):

- Die *Troposphäre*, genauer genommen die *neutrale Atmosphäre*, erstreckt sich von 0 bis ca. 10 km Höhe.

Bezeichnung	Frequenz f	Wellenlänge λ
P-Band	0.23–1 GHz	130–30 cm
L-Band	1–2 GHz	30–15 cm
S-Band	2–4 GHz	15–7.5 cm
C-Band	4–8 GHz	7.5–3.75 cm
X-Band	8–12.5 GHz	3.75–2.4 cm
Ku-Band	12.5–18 GHz	2.4–1.67 cm
K-Band	18–26.5 GHz	1.67–1.13 cm
Ka-Band	26.5–40 GHz	1.13–0.75 cm

Tabelle 4.2: Radarbänder

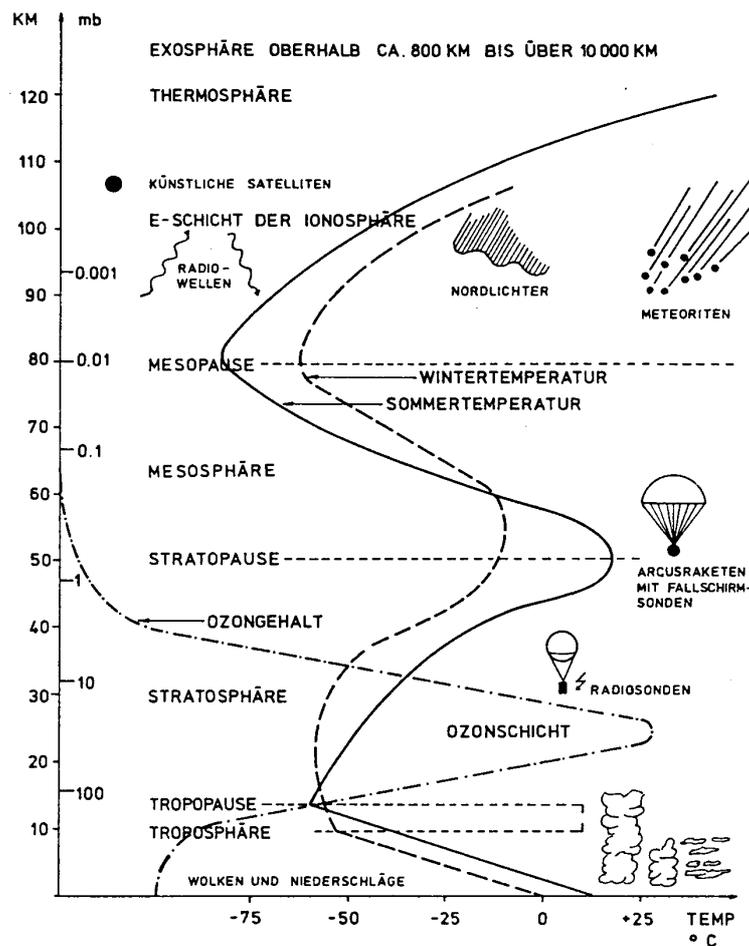


Abb. 4.4: Einteilung der Atmosphäre bis in eine Höhe von ca. 120 km.

- Die *Ionosphäre* liegt im Höhenbereich von etwa 50–1000 km.

In der Troposphäre spielt sich das Wetter ab. Die Temperatur nimmt hier im Mittel um etwa $6.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ pro 1000 m ab. Für Mikrowellen ist die Troposphäre *nicht dispersiv*, d.h. die Verzögerung der Signale ist in diesem Spektralbereich frequenzunabhängig. Im optischen Bereich ist die troposphärische Refraktion dagegen frequenzabhängig.

Die Ionosphäre ist der Teil der Atmosphäre, in dem genügend freie Elektronen und Ionen vorhanden sind, um die Ausbreitung von Radiowellen zu beeinflussen. Die Anzahl der freien Elektronen und Ionen hängt von der Intensität der Sonnenstrahlung ab, die für die Produktion der freien Elektronen und Ionen verantwortlich ist.

Die Verzögerung (oder Beschleunigung) eines elektromagnetischen Signals in der Atmosphäre hängt vom *Brechungsindex* n (refractive index), dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum zur Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Atmosphäre, ab:

$$n = \frac{c}{v} \quad (4.24)$$

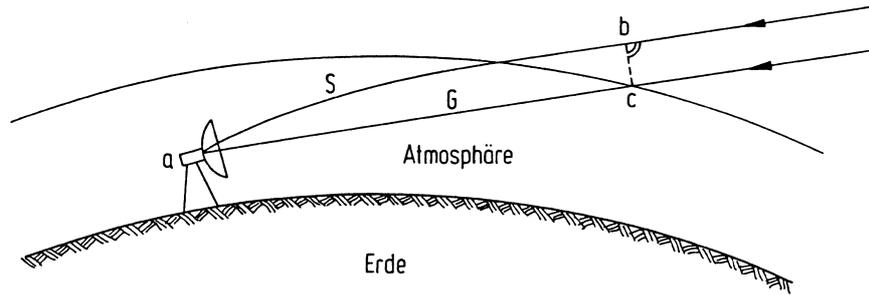


Abb. 4.5: Signalweg S durch die Atmosphäre und geometrische Distanz G [Elgered, 1993].

Für ein infinitesimales Wegstück ds des Signals ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben durch

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (4.25)$$

Setzen wir nach (4.24) $v = c/n$ ein, so folgt

$$dt = \frac{n(s)}{c} ds \quad (4.26)$$

Dabei ist $n(s)$ der Brechungsindex als Funktion der Position s entlang des Weges. Wenn wir die Integration über den ganzen Signalweg L ausführen, so erhalten wir die Lichtlaufzeit (vom Aussenden des Signals zur Zeit t_1 bis zum Empfang des Signals zur Zeit t_2):

$$\Delta t_L = t_2 - t_1 = \frac{1}{c} \int_L n(s) ds \quad (4.27)$$

Die sogenannte elektrische (oder optische) Weglänge L_E erhält man daraus durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c :

$$L_E = c \cdot \Delta t_L = c \cdot (t_2 - t_1) = \int_L n(s) ds \quad (4.28)$$

Die Verzögerung (oder Beschleunigung) $\delta\rho_{atm}$ des Signals — genauer die “excess path length” — ist die Differenz zwischen L_E und der geradlinigen geometrischen Distanz G (siehe Abb. 4.5):

$$\delta\rho_{atm} = L_E - G = \int_L n(s) ds - G = \int_L (n(s) - 1) ds + (S - G) \quad (4.29)$$

S bezeichnet dabei die Länge des wirklichen Signalweges. Der Term $(S - G)$ entsteht durch *Brechung* des Signals und ist (ausser bei sehr tiefen Elevationen) sehr klein und wird vernachlässigt, wenn nicht höchste Genauigkeit erforderlich ist. Beide Effekte, die Verzögerung bzw. Beschleunigung und die Brechung, werden zusammengefasst als *Refraktion* bezeichnet.

Grundsätzlich gilt, dass der Brechungsindex n von der Frequenz abhängig ist. In Abschnitt 4.1.2 haben wir gesehen, dass zwischen zwei verschiedenen Geschwindigkeiten unterschieden werden muss: der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_{gr} der Wellengruppe (Gruppengeschwindigkeit) und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{ph} des einzelnen Wellenberges (Phasengeschwindigkeit). Deshalb muss man auch zwei verschiedene Brechungsindizes verwenden:

$$n_{ph} = \frac{c}{v_{ph}}, \quad n_{gr} = \frac{c}{v_{gr}} \quad (4.30)$$

Uns interessiert nun der Zusammenhang zwischen dem Phasen- und dem Gruppenbrechungsindex. Wir beginnen dabei mit Gleichung (4.30) für die Phasengeschwindigkeit und differenzieren diese nach der Wellenlänge λ :

$$\frac{dv_{ph}}{d\lambda} = -\frac{c}{n_{ph}^2} \frac{dn_{ph}}{d\lambda} \quad (4.31)$$

Einsetzen der Gleichung (4.30) und der Rayleigh-Beziehung (4.23) in (4.31) liefert

$$\frac{c}{n_{gr}} = \frac{c}{n_{ph}} + \lambda \frac{c}{n_{ph}^2} \frac{dn_{ph}}{d\lambda} \quad (4.32)$$

und folglich

$$\frac{1}{n_{gr}} = \frac{1}{n_{ph}} \cdot \left(1 + \lambda \frac{1}{n_{ph}} \frac{dn_{ph}}{d\lambda} \right) \quad (4.33)$$

Berücksichtigt man noch die Näherung $(1 + \epsilon)^{-1} \approx (1 - \epsilon)$ für kleine ϵ , so erhält man:

$$n_{gr} = n_{ph} - \lambda \frac{dn_{ph}}{d\lambda} \quad (4.34a)$$

$$n_{gr} = n_{ph} + f \frac{dn_{ph}}{df} \quad (4.34b)$$

Um von (4.34a) auf die Darstellung (4.34b) mit der Frequenz f zu kommen, wurde noch verwendet, dass gilt (Differentiation von $v = \lambda f$):

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = -\frac{f}{df} \quad (4.35)$$

4.3 Ionosphärische Refraktion

Die Ionosphäre unterscheidet sich von der tiefer liegenden Troposphäre (siehe Abschnitt 4.4) dadurch, dass die Gasmoleküle der Ionosphäre sehr stark ionisiert sind: durch die Ultraviolett- und die Röntgenstrahlung der Sonne werden Elektronen aus den Gasmolekülen herausgelöst, wodurch sich positive Ionen und freie Elektronen ergeben. Für die Ionisation von verschiedenen Gasen werden unterschiedliche Energien (d.h. Frequenzen) benötigt. Da die Sonnenstrahlung je nach Frequenz in unterschiedlichen Höhen absorbiert wird, werden die einzelnen Gase in verschiedenen Höhen

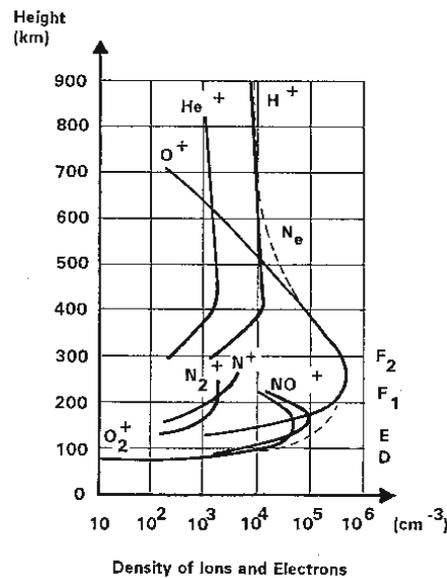


Abb. 4.6: Dichte der Ionen und der freien Elektronen N_e in der Ionosphäre. Die wichtigsten Schichten werden mit D, E, F₁, F₂ bezeichnet [Wild, 1994].

ionisiert. Dies führt zu einem schichtartigen Aufbau der Ionosphäre (siehe Abb. 4.6) im Höhenbereich von etwa 50–1000 km. Die Schichten unterscheiden sich in der Anzahl freier Elektronen pro m³ (bzw. cm³), der sogenannten *Elektronendichte* N_e . Die *maximale* Elektronendichte wird in der F₂-Schicht erreicht.

Die Intensität der Sonnenstrahlung variiert mit der Zeit. Bekannt ist insbesondere der 11-jährige Sonnenzyklus, der auf periodische Änderungen der Sonnenfleckensstruktur zurückzuführen ist.

4.3.1 Modellierung der ionosphärischen Refraktion

Der Phasenbrechungsindex n_{ph} , verursacht durch die freien Elektronen, kann für Frequenzen $f > 100$ MHz wie folgt berechnet werden [Brunner and Gu, 1991]:

$$n_{ph} = 1 - a \frac{N_e}{f^2} \tag{4.36}$$

Dabei ist N_e die Dichte der freien Elektronen (pro m³) und $a \approx 40.3 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ eine Konstante. Terme höherer Ordnung (Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke; Term proportional f^{-4}) sind hier vernachlässigt worden. Wir sehen, dass die ionosphärische Refraktion für $f > 100$ MHz — dies betrifft alle uns hier interessierenden Frequenzbereiche — *dispersiv* ist (Frequenzabhängigkeit f^{-2}) und von der Dichte der freien Elektronen $N_e(s)$ entlang des Weges s des Signals abhängt.

Den Gruppenbrechungsindex n_{gr} erhalten wir aus (4.36), indem wir zuerst (4.36)

nach der Frequenz f differenzieren:

$$\frac{dn_{ph}}{df} = \frac{2a N_e}{f^3} \quad (4.37)$$

Einsetzen von (4.37) und (4.36) in die Rayleigh-Beziehung (4.34b) für die Brechungsindizes führt dann sofort zu:

$$n_{gr} = 1 + a \frac{N_e}{f^2} \quad (4.38)$$

Die Brechungsindizes für Phase und Gruppe unterscheiden sich also nur im Vorzeichen des Terms proportional zu f^{-2} .

Da a und N_e immer positiv sind, gilt $n_{gr} > 1 > n_{ph}$ und damit auch $v_{gr} < c < v_{ph}$. Aufgrund dieser Tatsache ergibt sich also ein “phase advance” und ein “group delay” für die Phasen- bzw. Code-Signale (Gruppe).

Gemäss Formel (4.29) erhält man die ionosphärische Refraktionskorrektur $\delta\rho_{ion,ph}$ durch Integration des Brechungsindex n_{ph} entlang des Signalweges s ($S - G$ vernachlässigt):

$$\delta\rho_{ion,ph} = \int (n_{ph}(s) - 1) ds = \int \left(-a \frac{N_e(s)}{f^2} \right) ds = -\frac{a}{f^2} \int N_e(s) ds = -a \frac{E}{f^2} \quad (4.39)$$

Dabei bezeichnet E den sogenannten *integrierten Elektroneninhalt* (Total Electron Content TEC):

$$E = \int N_e(s) ds \quad (4.40)$$

Der TEC ist also die Anzahl der freien Elektronen, die sich in einer Säule vom Satelliten bis zum Empfänger mit 1 m^2 Grundfläche befinden. Der TEC wird in der Einheit *TECU* (TEC-Units) angegeben: $1 \text{ TECU} = 10^{16}$ freie Elektronen pro m^2 . In diesen Einheiten gilt für die Konstante a :

$$a = 40.3 \cdot 10^{16} \text{ m s}^{-2} \text{ TECU}^{-1} \quad (4.41)$$

Für die Gruppenausbreitung, d.h. für Code-Messungen bei GPS bzw. group delays bei VLBI (siehe (2.8)) erhält man in analoger Weise

$$\delta\rho_{ion,gr} = a \frac{E}{f^2} \quad (4.42)$$

Anhand der Gleichungen (4.39) und (4.42) sehen wir, dass die ionosphärische Distanzkorrektur $\delta\rho_{ion}$

- für Phasen-Messungen negativ ist, d.h. die gemessene Distanz ist kürzer als die geometrische Distanz (Beschleunigung, “phase advance”),
- für Code-Messungen und group delays positiv ist, d.h. die gemessene Distanz ist länger als die geometrische Distanz (Verzögerung, “group delay”).

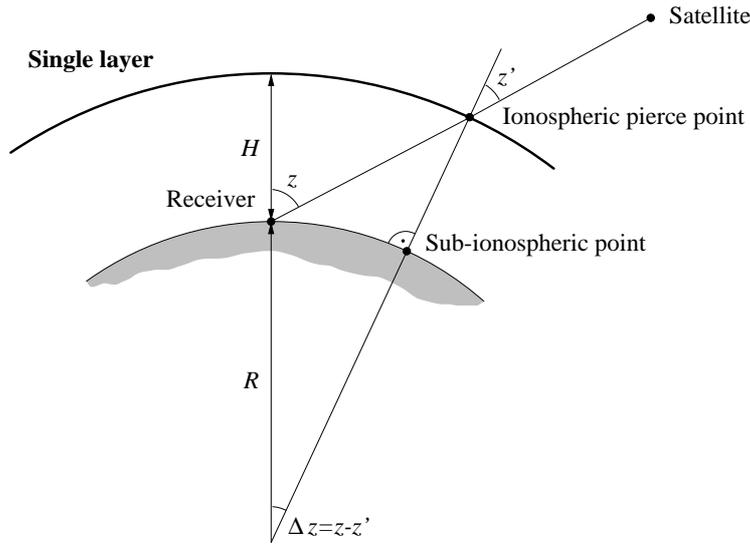


Abb. 4.7: Single-Layer-Modell der Ionosphäre [Schaer, 1999].

Den TEC in *Zenitrichtung* nennt man “Vertical Total Electron Content” (VTEC). Oft wird dieser VTEC modelliert und nicht direkt der TEC. Um aus dem VTEC E_V (gültig in Zenitrichtung) den TEC E für einen beliebigen Zenitwinkel z zu berechnen, muss man die sogenannte “*Mapping Function*” $m_{ion}(z)$ kennen:

$$E(z) = m_{ion}(z) E_V \quad (4.43)$$

Unter der vereinfachenden Annahme eines “Single-Layer-Modells” — sämtliche freien Elektronen konzentriert in einer infinitesimalen Schicht in der Höhe $H \approx 450$ km über der Erdoberfläche (siehe Abb. 4.7) — gilt:

$$m_{ion}(z) = \frac{1}{\cos z'} \quad (4.44)$$

Dabei berechnet sich der Zenitwinkel z' in der Höhe der Ionosphärenschicht aus dem Zenitwinkel z beim Empfänger gemäss

$$\sin z' = \frac{R}{R + H} \sin z \quad (4.45)$$

R bezeichnet dabei den Abstand vom Geozentrum zum Empfänger.

Die ionosphärische Refraktion, z.B. $\delta\rho_{ion,ph}$ (siehe (4.39)), ist folglich gegeben durch:

$$\delta\rho_{ion,ph} = -a \frac{E}{f^2} = -a m_{ion}(z) \frac{E_V}{f^2} = -a \frac{1}{\cos z'} \frac{E_V}{f^2} \quad (4.46)$$

Für GPS-Messungen mit Frequenzen um 1 GHz beträgt die ionosphärische Refraktion $\delta\rho_{ion}$ in Zenitrichtung (je nach Sonnenaktivität) etwa 1–15 m. Bei sehr tiefen Elevationen kann sie Werte von bis zu 150 m erreichen. Während die Zenitverzögerungen für VLBI S-Band-Beobachtungen ($f \approx 2$ GHz) ähnlich gross sind wie für GPS,

sind sie im X-Band aufgrund der grösseren Frequenz ($f \approx 8$ GHz) sehr viel kleiner, nämlich rund 4–60 cm.

Wenn man die ionosphärische Refraktion für SLR/LLR-Beobachtungen mit Frequenzwerten von $f \approx 5 \cdot 10^{14}$ Hz berechnet, so wird sofort klar, dass die ionosphärische Refraktion bei SLR/LLR überhaupt keine Rolle spielt.

Von der Verarbeitung von GPS-Daten her wissen wir bereits, dass man aus den Messungen Ψ_1, Ψ_2 auf zwei Frequenzen f_1, f_2 (L_1 -, L_2 -Messungen bei GPS, S-Band und X-Band bei VLBI) die sogenannte *ionosphärenfreie Linearkombination* Ψ_c bilden kann, um die ionosphärische Refraktion zu eliminieren:

$$\Psi_c = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Psi_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Psi_2 \quad (4.47)$$

Diese Linearkombination enthält (abgesehen von sehr kleinen Ionosphärentermen höherer Ordnung) keine ionosphärische Refraktion mehr.

4.3.2 Bestimmung von Ionosphärenmodellen

Da die GPS-Signale (und VLBI-Signale) der ionosphärischen Refraktion unterliegen, können sie verwendet werden, um Informationen über die Ionosphäre zu erhalten. Bei der Bestimmung von Ionosphärenmodellen aus GPS-Daten wird gewöhnlich ein Single-Layer-Modell angenommen (siehe Abb. 4.7; sämtliche freien Elektronen in einer infinitesimalen Schicht ca. 450 km über der Erdoberfläche). Die *Elektronendichte* E_V in dieser Schicht wird gewöhnlich modelliert als Funktion der geographischen Breite β und der geozentrischen, sonnenfixierten Länge $s = \lambda - \lambda_{\text{Sonne}}$, also $E_V = E_V(\beta, s)$. $E_V(\beta, s)$ wird durch einen *Polynomansatz* oder durch *Kugelfunktionen* dargestellt. Die *Koeffizienten* des Polynomansatzes oder der Kugelfunktionen sind dann die zu bestimmenden Parameter. Die Parameterbestimmung kann mit 2-Frequenz-Code- oder/und -Phasenmessungen durchgeführt werden, wobei als Observable bei GPS die Differenz $L_1 - L_2$ oder $P_1 - P_2$ (in Metern ausgedrückt) verwendet wird. (Da VLBI jeweils nur eine Radioquelle verfolgen kann, ist es schwierig, mit VLBI genügend Informationen für die Bestimmung von Ionosphärenmodellen zu gewinnen.)

Ein Beispiel eines globalen Ionosphärenmodells, das aus GPS-Daten bestimmt wurde, ist in Abbildung 4.8 wiedergegeben. Man sieht, dass die grösste Elektronenkonzentration kurz nach Mittag (Lokalzeit) (13 UT in Europa/Afrika) erreicht wird. Abbildung 4.9 zeigt die Entwicklung des mittleren TEC (Mittelwert über die ganze Erde; auch aus GPS-Daten bestimmt) seit 1995. Sehr schön erkennt man den Anstieg der Ionosphärenaktivität aufgrund des 11-jährigen Sonnenzyklus (letztes Maximum im Jahre 2001), die halbjährliche und jährliche Periode sowie die Rotationsperiode der Sonne von rund 27 Tagen.

4.4 Troposphärische Refraktion

Auch in der Troposphäre, genauer in der neutralen Atmosphäre (siehe Abb. 4.5), werden die Signale aufgrund des Brechungsindex n verzögert. Dabei ist der Bre-

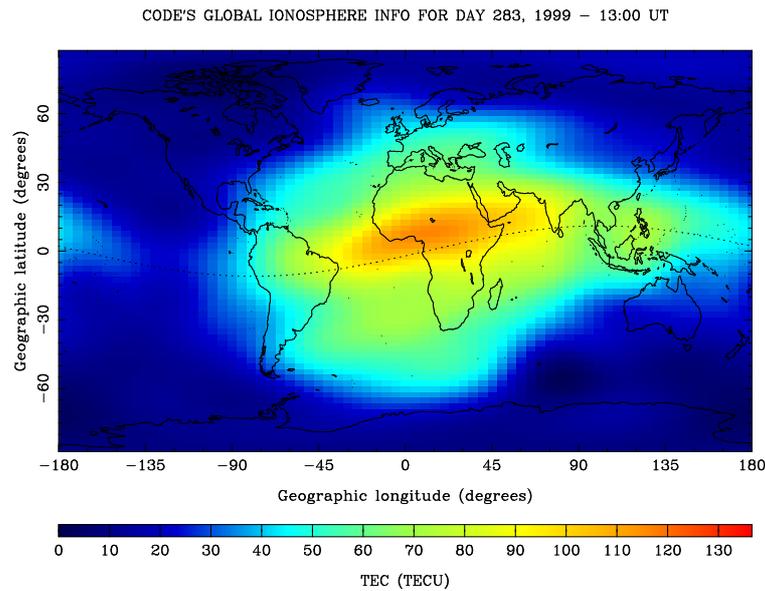


Abb. 4.8: Globales Ionosphärenmodell (berechnet am CODE-Analysezentrum in Bern).

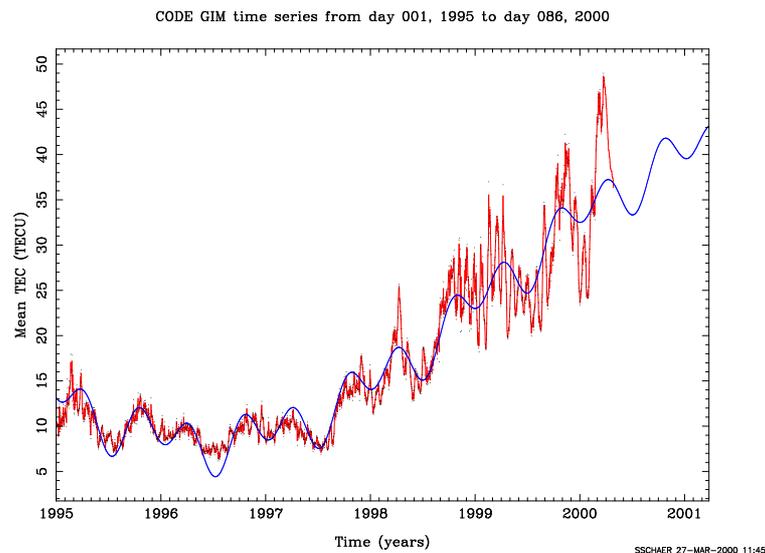


Abb. 4.9: Entwicklung der mittleren Anzahl freier Elektronen in der Ionosphäre seit 1995 (berechnet am CODE-Analysezentrum in Bern).

chungsindex n für Radiowellen im Bereich von 100 MHz bis etwa 15 GHz *unabhängig von der Frequenz*, die Verzögerung ist also gleich (d.h. nicht-dispersiv) für alle Frequenzen. Für optische Wellenlängen (SLR/LLR) ist die Situation jedoch anders: in diesem Bereich ist die troposphärische Refraktion dispersiv.

Gemäss Gleichung (4.29) können wir unter Vernachlässigung des Terms ($S - G$) für

die Verzögerung in der Troposphäre schreiben:

$$\delta\rho_{trp} = \int (n(s) - 1) ds \quad (4.48)$$

Führen wir die Brechzahl N (refractivity) mit

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 \quad (4.49)$$

ein, so gilt folglich

$$\delta\rho_{trp} = 10^{-6} \int N(s) ds \quad (4.50)$$

4.4.1 Troposphärische Refraktion für Radiowellen

Die Refraktivität der Atmosphäre ist nicht nur abhängig vom Druck (von der Dichte) und von der Kompressibilität der Gase, sondern auch von den elektrischen Eigenschaften der Moleküle. Die Moleküle verhalten sich wie kleine *Dipole* und bewirken Dipolmomente auf die Radiowellen. Bei Molekülen wie O₂ oder N₂ treten nur *induzierte Dipolmomente* auf, während z.B. H₂O-Moleküle (Wasserdampf) *permanente Dipolmomente* besitzen.

Nach [Thayer, 1974] kann die Brechzahl N für feuchte Luft im Frequenzbereich von 100 MHz bis 20 GHz (Radiowellen, Mikrowellen) geschrieben werden als

$$N = k_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} + k_2 \frac{e}{T} Z_w^{-1} + k_3 \frac{e}{T^2} Z_w^{-1} \quad (4.51)$$

mit

P_d	Partialdruck der trockenen Luft (mbar)
e	Partialdruck des Wasserdampfes (mbar)
T	Temperatur (K)
k_1, k_2, k_3	Empirische Koeffizienten (K/mbar, K/mbar, K ² /mbar)
Z_d, Z_w	Kompressibilitäten von trockener Luft und Wasserdampf

Der Wasserdampfdruck e kann aus der *relativen Feuchte* H (in Prozent) berechnet werden:

$$e = \frac{H}{100} e^{-37.2465+0.213166 T-0.000256908 T^2} \quad (4.52)$$

Wir können die Brechzahl N gemäss Gleichung (4.51) aufteilen in die Brechzahl N_d der *trockenen* (dry) Luft und die Brechzahl N_w des *feuchten* (wet) Anteils (Wasserdampf):

$$N = N_d + N_w \quad (4.53a)$$

$$N_d = k_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} \quad (4.53b)$$

$$N_w = k_2 \frac{e}{T} Z_w^{-1} + k_3 \frac{e}{T^2} Z_w^{-1} \quad (4.53c)$$

Die Gesamtverzögerung (trockener und feuchter Anteil; in Metern) beträgt etwa 2.3 m in Zenitrichtung (entspricht ca. 8 ns in Zeiteinheiten) und etwa 25 m bei einer Elevation von 5° .

Der trockene Anteil macht etwa 90% der gesamten Verzögerung aus und ist insbesondere vom Druck der trockenen Luft abhängig und daher einfach modellierbar aufgrund von Bodenmessungen des Luftdrucks. Wie der Luftdruck ändert sich dieser Anteil nur langsam mit der Zeit (ca. 2 cm/12 Std.).

Die Verzögerung aufgrund des Wasserdampfes (feuchter Anteil) beträgt maximal etwa 40 cm, ist örtlich wie zeitlich jedoch schnell veränderlich und folglich schlecht modellier- und prädizierbar wegen der unbekanntenen Verteilung des Wasserdampfes und des Wassers in der Atmosphäre.

Entsprechend den Formeln (4.53) und (4.50) gilt für die Verzögerung $\delta\rho_{trp}$:

$$\begin{aligned}\delta\rho_{trp} &= \delta\rho_{trp,d} + \delta\rho_{trp,w} \\ &= 10^{-6} \int N_d(s) ds + 10^{-6} \int N_w(s) ds\end{aligned}\quad (4.54)$$

Die troposphärische Verzögerung hängt — wie man anhand der Integrale in (4.54) sehen kann — von der Länge des Weges durch die Atmosphäre ab und ist daher eine Funktion des Zenitwinkels z des Satelliten oder Quasars. Um dieser *Abhängigkeit von der Zenitdistanz* z Rechnung zu tragen, wird die Verzögerung oft als Produkt der Zenitverzögerung (“zenith delay”) und der sogenannten “*Mapping Function*” $m_{trp}(z)$ geschrieben:

$$\delta\rho_{trp}(z) = m_{trp}(z) \delta\rho_{trp}^0 \quad (4.55)$$

Dabei bezeichnet $\delta\rho_{trp}^0 = \delta\rho_{trp}(z = 0^\circ)$ die Zenitverzögerung. Die einfachste Mapping-Funktion lautet:

$$m_{trp}(z) = \frac{1}{\cos(z)} \quad (4.56)$$

Da der Wasserdampfgehalt der Luft für eine Höhe von etwa 10 km null wird, wohingegen die trockene Luft sich bis etwa 40 km Höhe erstreckt, werden für den trockenen und den feuchten Anteil ($\delta\rho_{trp,d}$ und $\delta\rho_{trp,w}$) oft unterschiedliche Mapping-Funktionen ($m_{trp,d}$ und $m_{trp,w}$) verwendet:

$$\delta\rho_{trp}(z) = m_{trp,d}(z) \delta\rho_{trp,d}^0 + m_{trp,w}(z) \delta\rho_{trp,w}^0 \quad (4.57)$$

Die simple Mapping-Funktion $m_{trp}(z) = 1/\cos(z)$ ist für hochgenaue Anwendungen ungenügend (sogar bei einer Elevationsmaske von 20°). Bessere Mapping-Funktionen unterscheiden sich untereinander kaum in der Qualität, solange man nicht unterhalb einer Elevation von 10° beobachtet. Heute gebräuchliche Mapping-Funktionen sind u.a. von Niell, Lanyi, Chao, Herring, etc. entwickelt worden.

Um die Einflüsse der troposphärischen Refraktion zu reduzieren, gibt es zwei entgegengesetzte Ansätze:

- *Modellieren* der troposphärischen Refraktion *ohne GPS-Beobachtungen* zu verwenden (z.B. mit einer Standard-Atmosphäre, meteorologischen Messungen, Wasserdampfadiometern, lokalen Meteo-Modellen, ...).

- Verwenden der GPS-Messungen, um *Troposphärenparameter zu bestimmen*.

Auf die erste Möglichkeit wollen wir hier näher eingehen. Die Schätzung von Troposphärenparametern wird später in Abschnitt 4.4.3 behandelt.

Die Modelle der troposphärischen Refraktion gehen gewöhnlich von Werten für den *Druck* P , die *Temperatur* T und die *relative Feuchte* H auf der Station aus und berechnen daraus die *Zenitverzögerung* $\delta\rho_{trp}^0$ oder direkt die *Verzögerung* $\delta\rho_{trp}(z)$ für den *Zenitwinkel* z des beobachteten Satelliten oder Quasars. Dabei müssen Annahmen über die atmosphärischen Bedingungen oberhalb der Station (und das Mapping) gemacht werden (oft durch *Radiosondenmessungen* gewonnene empirische Ansätze). Eine Vielzahl solcher Modelle (Saastamoinen, Hopfield, Essen&Froome, Lanyi, ...) sind heute verfügbar. Wir wollen hier als Illustration die Formel des Saastamoinen-Modells angeben:

$$\delta\rho_{trp}(z) = \frac{2277 \cdot 10^{-6}}{\cos(z)} \left(P + \left\{ \frac{1255}{T} + 0.05 \right\} \cdot e - 1.16 \tan^2 z \right) \quad (4.58)$$

Dabei ist P in mbar, T in Kelvin und e in mbar einzusetzen, um $\delta\rho_{trp}(z)$ in Metern zu erhalten. Der erste Term in der runden Klammer steht für den trockenen Anteil, der zweite Term für den feuchten Anteil und der dritte Term für die Berücksichtigung der Erdkrümmung.

Die meteorologischen Daten P , T und H (bzw. e ; siehe (4.52)) stammen entweder aus Messungen auf der Station oder werden mit Hilfe einer Standardatmosphäre berechnet. Bei Verwendung einer Standardatmosphäre startet man mit Werten P_0 , T_0 und H_0 für Druck, Temperatur und relative Feuchte auf *Meereshöhe* h_0 und benutzt Formeln für die Extrapolation dieser Größen auf die Höhe h der Station (h_0 und h in Metern):

$$P = P_0 (1 - 0.0000226 (h - h_0))^{5.225} \quad (4.59a)$$

$$T = T_0 - 0.0065 (h - h_0) \quad (4.59b)$$

$$H = H_0 \cdot e^{-0.0006396 (h - h_0)} \quad (4.59c)$$

Typische Startwerte für Druck, Temperatur und relative Feuchte auf Meereshöhe sind beispielsweise

$$P_0 = 1013.25 \text{ mbar} \quad (4.60a)$$

$$T_0 = 18 \text{ °C} \quad (4.60b)$$

$$H_0 = 50 \% \quad (4.60c)$$

P , T und H auf der Höhe der Station können mit diesen Formeln sehr einfach berechnet werden.

Leider entspricht die Standardatmosphäre meist nicht den wirklichen Verhältnissen (tägliche, saisonale Variationen, ...) und gemessene Meteorodaten sind oft zu ungenau oder nicht repräsentativ für die ganze Atmosphäre oberhalb der Station. Ein Messfehler in der Temperatur von nur einem Grad kann beispielsweise bereits einen Fehler von 8 cm in der zu bestimmenden Punkthöhe verursachen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung von *Wasserdampffradiometern*, um den Wasserdampf in der Atmosphäre zu messen. Dies liefert den feuchten Anteil. Den trockenen Anteil kann man mit Hilfe von Druckmessungen auf der Station genügend genau berechnen. Wasserdampffradiometer sind aber sehr teuer.

Aus diesen Gründen liegt der Versuch nahe, die troposphärische Verzögerung aus den Messungen von GPS, VLBI oder DORIS selbst zu bestimmen (siehe Abschnitt 4.4.3).

4.4.2 Troposphärische Refraktion im optischen Bereich

Von den heute gebräuchlichen geodätischen Raumverfahren (VLBI, GPS, SLR, DORIS) ist SLR diejenige Beobachtungstechnik, die am wenigsten unter den Einflüssen der Atmosphäre "leidet". Im Vergleich zu den von VLBI, GPS und DORIS benutzten Mikrowellen sind die optischen Frequenzen ziemlich unempfindlich für die zwei am schwierigsten zu modellierenden atmosphärischen Einflüsse, nämlich die Ionosphäre (siehe Abschnitt 4.3.1; $\delta\rho_{ion} \approx 0$) und den Wasserdampfgehalt. Die Laser-Wellenlängen im sichtbaren Bereich und im nahen Ultraviolett sind typischerweise weit von den starken Absorptionslinien von Wasserdampf entfernt.

Für die Berechnung der troposphärischen Verzögerung (group delay) bei SLR/LLR wird als Standard das Modell von [Marini and Murray, 1973] verwendet. Die Distanzkorrektur $\delta\rho_{atm}$ (nur ein Weg; siehe auch (2.62)) beträgt nach diesem Modell:

$$\delta\rho_{atm} = \delta\rho_{trp} = \frac{f(\lambda)}{F(\phi, h)} \cdot \frac{A + B}{\sin E + \frac{B/(A+B)}{\sin E + 0.01}} \quad (4.61)$$

mit

$$A = 0.002357 P + 0.000141 e \quad (4.62)$$

$$B = 1.084 \cdot 10^{-8} P T K + 4.734 \cdot 10^{-8} \frac{P^2}{T} \frac{2}{3 - 1/K} \quad (4.63)$$

$$K = 1.163 - 0.00968 \cos(2\phi) - 0.00104 T + 0.00001435 P \quad (4.64)$$

wobei

$\delta\rho_{trp}$	Distanzkorrektur (m)
E	Elevation des Satelliten (oder des Mondes)
P	Druck auf der Station (mbar)
T	Temperatur auf der Station (K)
e	Wasserdampfdruck auf der Station (mbar)
$f(\lambda)$	Laser-Frequenz-Parameter (Wellenlänge λ in μm)
$F(\phi, h)$	Laser-Stationsfunktion

Den Wasserdampfdruck e (mbar) erhält man aus der relativen Feuchte H (Prozent) gemäss

$$e = \frac{H}{100} \cdot 6.11 \cdot 10^{\frac{7.5(T-273.15)}{237.3+(T-273.15)}} \quad (4.65)$$

Der Laser-Frequenz-Parameter $f(\lambda)$, also die Frequenzabhängigkeit (Dispersion), ist gegeben durch

$$f(\lambda) = 0.9650 + \frac{0.0164}{\lambda^2} + \frac{0.000228}{\lambda^4} \quad (4.66)$$

d.h. $f(\lambda_R) = 1$ (Rubinlaser mit $\lambda_R = 0.6943 \mu\text{m}$), $f(\lambda_G) = 1.02579$ (grüner YAG-Laser mit $\lambda_G = 0.532 \mu\text{m}$) und $f(\lambda_{IR}) = 0.97966$ (infraroter YAG-Laser mit $\lambda_{IR} = 1.064 \mu\text{m}$).

Die Laser-Stationsfunktion $F(\phi, h)$, die die Abhängigkeit von der geographischen Breite ϕ und der Stationshöhe h beinhaltet, lautet schliesslich

$$F(\phi, h) = 1 - 0.0026 \cos(2\phi) - 0.00031 h \quad (4.67)$$

Wir wollen hier nicht die Details dieses Modells behandeln, sondern nur auf ein paar interessante Punkte hinweisen:

- Die Distanzkorrektur beträgt bei Normalbedingungen ($P = 1000 \text{ mbar}$, $T = 300 \text{ K}$, $H = 50 \%$) im Zenit ungefähr 2.45 m und bei 20° Elevation etwa 7 m.
- Wie man Gleichung (4.62) entnehmen kann, kommt die Hauptverzögerung durch den trockenen Anteil zustande (Term mit P).
- Für den feuchten Anteil $\delta\rho_{trp,w}^{SLR}$ aufgrund des Wasserdampfgehalts gilt für SLR/LLR-Messungen (siehe ebenfalls (4.62))

$$\delta\rho_{trp,w}^{SLR} \approx 0.000141 e \quad (4.68)$$

wohingegen für Mikrowellen (GPS/VLBI) nach dem Modell von Saastamoinen (Gleichung (4.58)) bei $T = 273 + 20$ Kelvin ungefähr gilt:

$$\begin{aligned} \delta\rho_{trp,w}^{GPS} &\approx 0.002277 \cdot \left(\frac{1225}{T} + 0.05\right) e \\ &\approx 0.0096 e \end{aligned} \quad (4.69)$$

Vergleichen wir die zwei Gleichungen (4.68) und (4.69), so sehen wir, dass der Einfluss des Wasserdampfs auf Mikrowellen um rund den Faktor

$$\frac{\delta\rho_{trp,w}^{GPS}}{\delta\rho_{trp,w}^{SLR}} \approx 68 \quad (4.70)$$

grösser ist als auf Signale im optischen Bereich. Während bei GPS und VLBI Variationen der Zenitverzögerung aufgrund des Wasserdampfs von 5–40 cm möglich sind, betragen sie bei SLR/LLR nur 0.1–0.6 cm. Die troposphärische Verzögerung bei SLR/LLR kann also sehr gut anhand von meteorologischen Messungen auf der Station modelliert werden.

- Mit 2-Farbenlasern wird seit einiger Zeit versucht, allfällige nicht modellierte Troposphäreneffekte unter Ausnutzung der Dispersion (siehe (4.66)) zu erfassen.

4.4.3 Das Schätzen von Troposphärenparametern

Beobachtet man denselben Punkt während mehr als einer Stunde, so werden in der Auswertung von VLBI-, GPS- und DORIS-Daten in der Regel zusätzlich zu anderen Parametern sogenannte *Troposphärenzenitverzögerungen* als Unbekannte mitbestimmt, was zu einer deutlichen Verbesserung der Höhenkomponente führt.

Um Troposphärenzenitverzögerungen $\delta\rho_{trp}^0$ (siehe (4.55)) bestimmen zu können, brauchen wir die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung nach diesen Troposphärenparametern $\delta\rho_{trp}^0$ (siehe auch Abschnitt 3.2). Exemplarisch für die verschiedenen Beobachtungstechniken wollen wir wieder die partiellen Ableitungen der Beobachtungsgleichung der GPS-Phasenmessungen L_E^S nach den Troposphärenparametern $\delta\rho_{trp}^0$ bilden. Die Beobachtungsgleichung lautet in diesem Fall (siehe (2.43)):

$$L_E^S = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)| + \delta\rho_{trp} + \delta\rho_{ion} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{mul} + c\delta t_E - c\delta t^S + \lambda(N_E^S + \alpha_E - \alpha^S) + \epsilon_E^S \quad (4.71)$$

Die partielle Ableitung ergibt sofort

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \delta\rho_{trp}^0} = \frac{\partial \delta\rho_{trp}}{\partial \delta\rho_{trp}^0} \quad (4.72)$$

Mit Gleichung (4.55) für die Troposphärenkorrektur $\delta\rho_{trp}$ folgt schliesslich

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \delta\rho_{trp}^0} = m_{trp}(z) \quad (4.73)$$

Falls der trockene Anteil der Verzögerung mit Hilfe des auf der Station gemessenen Drucks modelliert wird und nur der feuchte Anteil der Verzögerung geschätzt werden soll, dann gilt für die partielle Ableitung nach dem feuchten Anteil der Zenitverzögerung $\delta\rho_{trp,w}^0$ gemäss (4.57) analog zu (4.73):

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \delta\rho_{trp,w}^0} = m_{trp,w}(z) \quad (4.74)$$

Gewöhnlich werden für sämtliche Stationen solche Troposphärenzenitparameter mitbestimmt, und jeder dieser Parameter ist jeweils für ein Zeitintervall von 30–120 Minuten aufgesetzt (gültig).

Die Schätzung erfolgt entweder *deterministisch* mittels normaler Ausgleichungsalgorithmen oder unter Verwendung von Kalmanfiltern, wobei die troposphärische Zenitverzögerung als *stochastischer Prozess* (z.B. als Random-Walk oder Gauss-Markov-Prozess) modelliert wird.

Das Hauptproblem bei der Schätzung von Troposphärenparametern sind die starken Korrelationen zwischen den folgenden Parametern:

- Stationshöhen
- Troposphärenzenitparameter

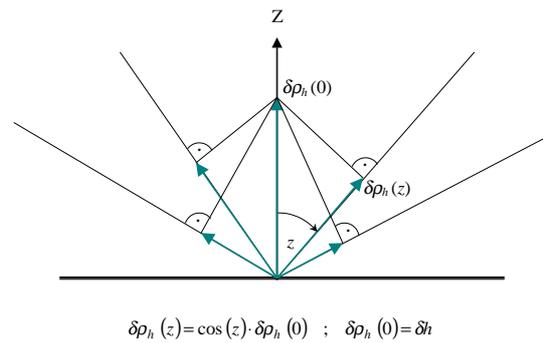


Abb. 4.10: Zenitabhängigkeit einer Stationshöhen-Korrektur.

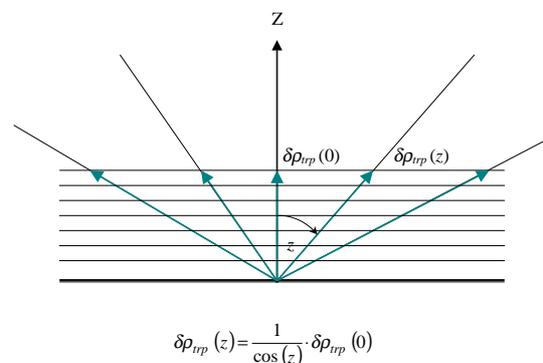


Abb. 4.11: Zenitabhängigkeit einer Zenittroposphären-Korrektur.

- Empfängeruhrkorrekturen
- Phasenmehrdeutigkeiten (GPS)
- Offsets und Variationen der Antennenphasenzentren (GPS)

Die Zenitabhängigkeit einiger dieser Parametertypen ist in den Abbildungen 4.10, 4.11 und 4.12 dargestellt. Um die verschiedenen Parametertypen dekorrelieren zu können, müssen Beobachtungen zur Verfügung stehen, die von möglichst unterschiedlichen Elevationen stammen und einen möglichst langen Zeitraum abdecken (mindestens 1 Stunde).

Bei VLBI- und GPS-Analysen werden in neuester Zeit zusätzlich auch noch sogenannte Troposphärengradienten geschätzt, d.h. azimutabhängige Troposphärenkorrekturen.

Während früher die Verzögerung durch die Troposphäre als ein Ärgernis angesehen wurde, das die genaue Bestimmung von Punktkoordinaten erschwert, sieht man

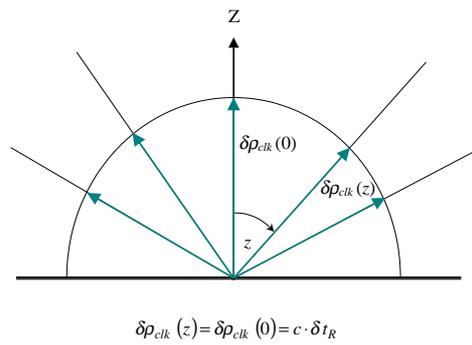


Abb. 4.12: Zenitabhängigkeit einer Empfängeruhr-Korrektur.

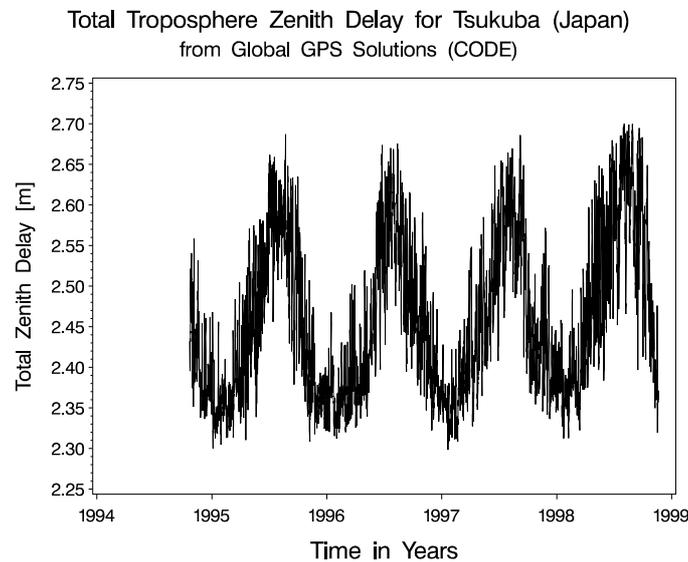


Abb. 4.13: Aus GPS-Daten bestimmte Gesamtverzögerung der GPS-Signale durch die Troposphäre.

darin heute auch ein interessantes Signal. Die mit GPS oder VLBI bestimmten Zenit-troposphärenparameter liefern Information über den integrierten Wasserdampfgehalt oberhalb der Station. Sowohl Meteorologen als auch Klimatologen sind an solchen Daten interessiert. Als Beispiel zeigt Abbildung 4.13 die aus GPS-Daten bestimmte Gesamtverzögerung durch die Troposphäre für die Station Tsukuba in Japan. Deutlich sind die saisonalen Schwankungen aufgrund der grossen Feuchtigkeit im Sommer zu sehen.

5. Satellitenbahnen

5.1 Bewegungsgleichung der ungestörten Bahn

Die allgemeine Bewegungsgleichung (2. Newtonsches Gesetz) eines Körpers lautet

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad (5.1)$$

Dabei ist m die Masse des betrachteten Körpers, $\ddot{\mathbf{x}}$ die Beschleunigung des Körpers in einem Inertialsystem und \mathbf{F} die auf den Körper wirkende Kraft (Vektorsumme aller angreifenden Kräfte).

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt für die Kraft \mathbf{F} , die ein Körper der Masse M (z.B. die Erde) am Ort \mathbf{x}_E auf den Körper der Masse m (z.B. den Satelliten) mit dem Ortsvektor \mathbf{x} ausübt:

$$\mathbf{F} = -GMm \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|^3} \quad (5.2)$$

G bezeichnet dabei die Gravitationskonstante.

Mit (5.1) folgt daraus die Bewegungsgleichung für die Masse m :

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -GMm \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_E)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_E|^3} \quad (5.3)$$

Analog erhält man für die Bewegungsgleichung der Masse M aufgrund der Gravitationskraft der Masse m :

$$M\ddot{\mathbf{x}}_E = -GMm \frac{(\mathbf{x}_E - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}|^3} \quad (5.4)$$

Verlegen wir den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum der Masse M , so gilt für den Ortsvektor \mathbf{r} von m in diesem System

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_E \quad (5.5)$$

Zweimaliges Ableiten nach der Zeit und Einsetzen der Gleichungen (5.3) (dividiert durch m) und (5.4) (dividiert durch M) liefert die Bewegungsgleichung von m relativ zum Massenzentrum von M :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}_E = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} - Gm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.6)$$

Für einen künstlichen Erdsatelliten können wir die Masse m gegenüber M vernachlässigen und erhalten damit die *ungestörte Bewegungsgleichung* eines Satelliten:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.7)$$

Dabei ist \mathbf{r} der geozentrische Ortsvektor des Satelliten und M die Erdmasse.

Die Bewegungsgleichung (5.7) ist eine vektorielle Differentialgleichung 2. Ordnung, d.h., dass zur Definition einer eindeutigen Lösung (also einer eindeutigen Bahn) 6 Integrationskonstanten angegeben werden müssen. Die zwei am meisten verwendeten Darstellungen der 6 Integrationskonstanten sind

(1) die Angabe des *Orts- und Geschwindigkeitsvektors* zu einem Zeitpunkt t_0 :

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0; \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (5.8)$$

(2) die Angabe der *6 Keplerschen Elemente* der Bahn:

- a Grosse Halbachse
- e Numerische Exzentrizität
- i Bahnneigung gegenüber dem Äquator
- Ω Rektaszension des aufsteigenden Knotens
- ω Argument des Perigäums (Perigäumsabstand)
- t_p Perigäumsdurchgangszeit

Oft wird anstelle der Perigäumsdurchgangszeit t_p auch die *mittlere Anomalie* M_0 zum Zeitpunkt t_0 verwendet.

Die Lösungen der ungestörten Bewegungsgleichung sind Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel). Die Keplerschen Elemente sind Integrationskonstanten des ungestörten Zweikörperproblems. Sie bleiben daher zeitlich konstant und beschreiben die ungestörte Satellitenbahn eindeutig.

5.2 Bewegungsgleichung der gestörten Satellitenbahn

Bisher haben wir die Erde als Punktmasse behandelt und auch sonst keinerlei weitere Kräfte zugelassen (wie beispielsweise die Gravitationskräfte von Sonne und Mond). Dies wollen wir nun verbessern, indem wir die Kräfte von Mond, Sonne und Planeten berücksichtigen und uns vorstellen, dass die Erde aus infinitesimalen Massenelementen dM oder Volumenelementen dV aufgebaut ist. Im Inertialsystem lautet dann die Bewegungsgleichung des Satelliten:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= -G \int_M \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^3} dM - G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \\ &= -G \int_{Vol} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^3} \rho(\mathbf{X}) dV - G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das Integral in (5.9) erstreckt sich über sämtliche Punkte \mathbf{X} des Erdkörpers. Die Dichte im Punkt \mathbf{X} ist durch $\rho(\mathbf{X})$ gegeben. Die Summation erfolgt über alle zu berücksichtigenden Himmelskörper mit Ausnahme der Erde, insbesondere über Mond und Sonne. Die Störungen der Planeten sind um Grössenordnungen kleiner. Wir betrachten alle Himmelskörper — mit Ausnahme der Erde — als Punktmassen.

Die Bewegungsgleichung für das Geozentrum, den Massenschwerpunkt der Erde erhalten wir, indem wir den Einfluss des Satelliten auf die Erde vernachlässigen und die Erde in ihrer Wechselwirkung mit den anderen Himmelskörpern als Massenpunkt behandeln:

$$\ddot{\mathbf{x}}_E = -G \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_j|^3} \quad (5.10)$$

Die *geozentrische* Bewegungsgleichung des Satelliten folgt aus der Differenz der Gleichungen (5.9) und (5.10). Bezeichnen wir die geozentrischen Ortsvektoren der gravitierenden Körper mit \mathbf{r}_j , diejenigen der Volumenelemente mit \mathbf{R} und den geozentrischen Ortsvektor des Satelliten mit \mathbf{r} , so erhalten wir

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \int_{Vol} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \rho(\mathbf{R}) dV - G \sum_{j=1}^n m_j \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right\} \quad (5.11)$$

Da es sich hier nur um Gravitationskräfte handelt, kann jeder einzelne Term in dieser Bewegungsgleichung auch als *Gradient eines Potentials* geschrieben werden. Man kann einfach nachweisen, dass gilt:

$$\ddot{\mathbf{r}} = G \nabla \int_{Vol} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV + G \sum_{j=1}^n m_j \nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right\} \quad (5.12)$$

Die Bewegungsgleichung (5.12) kann man im Prinzip auch auf einen Punkt auf der Erdoberfläche anwenden. In diesem Zusammenhang nennt man die Summanden in der Summe $\sum \dots$ von (5.12) auch *gezeiten-erzeugende Potentiale* der störenden Himmelskörper. Wäre die Erde ein ideal elastischer Körper, würde sich ihre Oberfläche als Äquipotentialfläche in diesem Störpotential ausbilden. Wäre die Erde vollkommen starr, würde sie sich überhaupt nicht verformen. Die Erde ist jedoch *weder ideal elastisch noch vollkommen starr*. Die Elastizitätseigenschaften werden durch sogenannte *Lovesche Zahlen* (siehe auch Abschnitt 3.1.2) charakterisiert. Die mit dem Potential verknüpften Loveschen Zahlen k sind dimensionslos und liegen zwischen Null (starre Erde) und Eins (ideal elastische Erde). Für die Erde gilt eine Love-Zahl für das Potential von

$$k \approx 0.3 \quad (5.13)$$

Die Erde deformiert sich also infolge des gezeiten-erzeugenden Potentials in erster Näherung so, dass dem Potential einer starren Erde ein Potential proportional zum gezeiten-erzeugenden Potential überlagert wird, wobei die Love-Zahl als Proportionalitätsfaktor wirkt. Weil die Deformationen der elastischen Erde und auch die Meeresgezeiten sehr klein sind, können wir das Integral im ersten Term der Gleichung (5.12) aufspalten in ein Starrkörperpotential, ein durch die festen Erdgezeiten induziertes Potential $V_{gez, fest}$ und ein Potential $V_{gez, ozean}$ aufgrund der Meeresgezeiten:

$$G \int_{Vol} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV = G \int_{Vol, starr} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV + V_{gez, fest} + V_{gez, ozean} \quad (5.14)$$

mit

$$V_{gez, fest} = k G \sum_{j=1}^n m_j \nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right\} \quad (5.15)$$

Man kann zeigen, dass die Festlandgezeiten ("solid Earth tides") auf einfache Weise durch eine Entwicklung in Kugelfunktionen dargestellt werden können. Dasselbe gilt für das Potential der Meeresgezeiten. Die Situation wurde hier allerdings stark auf

eine nicht-rotierende kugelförmige Erde vereinfacht. Korrekterweise müsste man die Abplattung und die Rotation der Erde berücksichtigen (siehe [McCarthy, 1996] und [Wahr, 1981]).

Wir haben die Bewegungsgleichung eines künstlichen Erdsatelliten in der Newtonschen Näherung angegeben. Die Auswirkungen der Relativitätstheorie sind sehr klein und können durch einen Korrekturterm berücksichtigt werden

$$\mathbf{a}_{rel} = -\frac{GM}{c^2 r^3} \left\{ \left[2(\beta + \gamma) \frac{GM}{r} - \gamma \dot{\mathbf{r}}^2 \right] \mathbf{r} + 2(1 + \gamma)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} \right\} \quad (5.16)$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit und β, γ sind Parameter der PPN-(Parametrized Post-Newtonian)-Gravitationstheorien. Für die Einsteinsche Theorie gilt $\beta = \gamma = 1$.

Nehmen wir schliesslich noch die Beschleunigung \mathbf{a}_{lw} aufgrund des Luftwiderstandes und die Beschleunigung \mathbf{a}_{sd} aufgrund des Strahlungsdrucks hinzu, so lässt sich die *Bewegungsgleichung der gestörten Bahn eines künstlichen Erdsatelliten* wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & \nabla \left\{ G \int_{Vol, starr} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV \right\} + G \sum_{j=1}^n m_j \nabla \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right\} \\ & + \nabla V_{gez, fest} + \nabla V_{gez, ozean} + \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{lw} + \mathbf{a}_{sd} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

Um eine eindeutige Satellitenbahn zu erhalten, müssen wir wiederum Anfangsbedingungen definieren:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0; \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (5.18)$$

Diese komplexen Bewegungsgleichungen lassen sich im allgemeinen nur noch durch numerische Integration lösen.

Als Zusammenfassung zeigt Tabelle 5.1 die Grössenordnungen der verschiedenen Beschleunigungen für unterschiedliche Satellitentypen.

5.3 Mittlere und oskulierende Bahnelemente

Beim Zweikörperproblem besteht eine *umkehrbar eindeutige* Beziehung zwischen den Keplerschen Bahnelementen einerseits und dem Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Satelliten zu einem beliebig wählbaren Zeitpunkt t andererseits:

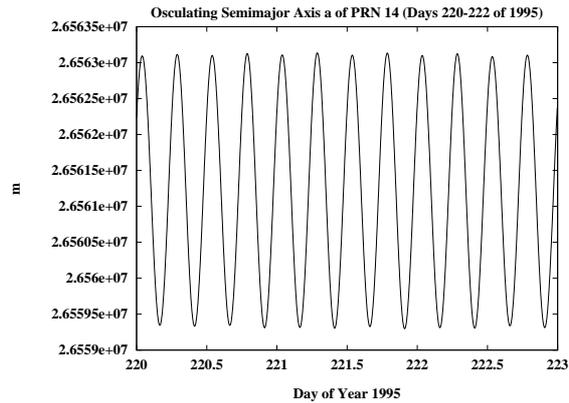
$$t : \{\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)\} \longleftrightarrow \{a, e, i, \Omega, \omega, t_p\} \quad (5.19)$$

Wir können also mit den Formeln des Zweikörperproblems die (zeitlich konstanten) Bahnelemente aus irgendeinem Satz von Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit) berechnen und umgekehrt.

Wegen der Störbeschleunigungen in der Bewegungsgleichung (5.17) verändern sich jedoch die Bahnelemente des Satelliten dauernd und sind keine Integrationskonstanten mehr. Man kann die Beziehung (5.19) aber dennoch verwenden, um sogenannte

Tabelle 5.1: Beschleunigungen auf unterschiedliche Satelliten [Milani et al., 1987]

Cause	Formula	Parameters (in CGS units)	Accelerations (cm s ⁻²)			
			Geosynchronous satellite $a = 42\,160\text{ km}$ $\mathcal{A}/\mathcal{M} = 0.1\text{ cm}^2\text{ g}^{-1}$	LAGEOS 12 270 0.007	Starlette ~ 7300 0.01	SEASAT (or ERS-1) ~ 7100 0.2
(1) Earth's monopole	$\frac{GM_{\oplus}}{r^2}$	$GM_{\oplus} = 3.986 \times 10^{20}$	2.2×10^1	2.8×10^2	7.5×10^2	7.9×10^2
(2) Earth's oblateness	$3 \frac{GM_{\oplus}}{r^2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2 \bar{J}_{20}$	$\bar{J}_{20} = 4.84 \times 10^{-4}$ $R_{\oplus} = 6.378 \times 10^8$	7.4×10^{-4}	1.0×10^{-1}	8.3×10^{-1}	9.3×10^{-1}
(2) Low-order geopotential harmonics: e.g. $l = 2$, $m = 2$	$3 \frac{GM_{\oplus} R_{\oplus}^2}{r^4} \bar{J}_{22}$	$\bar{J}_{22} = 2.81 \times 10^{-6}$	4.3×10^{-6}	6.0×10^{-4}	4.8×10^{-3}	5.4×10^{-3}
$l = 6, m = 6$	$7 \frac{GM_{\oplus} R_{\oplus}^6}{r^8} \bar{J}_{66}$	$\bar{J}_{66} = 2.42 \times 10^{-7}$	4.5×10^{-10}	8.8×10^{-6}	5.6×10^{-4}	7.0×10^{-4}
(2) High-order geopotential harmonics: e.g. $l = 18$, $m = 18$	$19 \frac{GM_{\oplus} R_{\oplus}^{18}}{r^{20}} \bar{J}_{1818}$	$\bar{J}_{1818} = 1.8 \times 10^{-8}$	1.3×10^{-20}	6.9×10^{-10}	2.2×10^{-5}	3.9×10^{-5}
(3) Perturbation due to the Moon	$2 \frac{GM_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} r$	$M_{\zeta} = M_{\oplus}/81.3$ $r_{\zeta} = 3.8 \times 10^{10}$	7.3×10^{-4}	2.1×10^{-4}	1.3×10^{-4}	1.3×10^{-4}
(3) Perturbation due to the Sun	$2 \frac{GM_{\odot}}{r_{\odot}^3} r$	$M_{\odot} = 3.29 \times 10^5 M_{\oplus}$ $r_{\odot} = 1.5 \times 10^{13}$	3.3×10^{-4}	9.6×10^{-5}	5.7×10^{-5}	5.6×10^{-5}
(3) Perturbation due to other planets (e.g. Venus)	$2 \frac{GM_{\varphi}}{r_{\varphi}^3} r$	$M_{\varphi} = 0.82 M_{\oplus}$ $r_{\varphi} \approx 4 \times 10^{12}$	4.3×10^{-8}	1.3×10^{-8}	7.5×10^{-9}	7.3×10^{-9}
(4) Indirect oblation	$3 \bar{J}_{20} \frac{GM_{\oplus}}{r_{\zeta}^2} \left(\frac{R_{\oplus}}{r_{\zeta}}\right)^2 \frac{M_{\zeta}}{M_{\oplus}}$		1.4×10^{-9}	1.4×10^{-9}	1.4×10^{-9}	1.4×10^{-9}
(5) General relativistic correction	$\frac{GM_{\oplus}}{r^2} \frac{GM_{\oplus}}{c^2} \frac{1}{r}$	$\frac{GM_{\oplus}}{c^2} = 0.44$	2.3×10^{-9}	9.5×10^{-8}	4.5×10^{-7}	4.9×10^{-7}
(6) Atmospheric drag	$\frac{1}{2} C_D \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} \rho V^2$	$C_D = 2-4$ $\rho = 0-10^{-16}$	0(?)	3×10^{-10}	7×10^{-8}	2×10^{-5}
(7) Solar radiation pressure	$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} \frac{\Phi_{\odot}}{c}$	$\Phi_{\odot} = 1.38 \times 10^6$	4.6×10^{-6}	3.2×10^{-7}	4.6×10^{-7}	9.2×10^{-6}
(8) Earth's albedo radiation pressure	$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} \frac{\Phi_{\oplus}}{c} A_{\oplus} \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^2$	$A_{\oplus} \approx 0.4$	4.2×10^{-8}	3.4×10^{-8}	1.4×10^{-7}	3.0×10^{-6}
(9) Thermal emission	$\frac{4}{9} \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}} \frac{\Phi_{\oplus}}{c} \alpha \frac{\Delta \mathcal{T}}{\mathcal{T}_0}$	$\alpha = 0.4-0.7$ $\Delta \mathcal{T} = 1-20^\circ$	9.5×10^{-8}	1.9×10^{-10}	2.7×10^{-10}	1.9×10^{-7}

Abb. 5.1: Oskulierende Bahnelemente: Grosse Halbachse a .

oskulierende Bahnelemente als Funktion der Zeit zu definieren:

$$t : \{\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)\} \longleftrightarrow \{a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), t_p(t)\} \quad (5.20)$$

Dabei repräsentieren $\mathbf{r}(t)$ und $\dot{\mathbf{r}}(t)$ die gestörte Bahn des Satelliten, und die Berechnung der oskulierenden Elemente in (5.20) hat mit den *Formeln des Zweikörperproblems* zu erfolgen.

Die mit den oskulierenden Bahnelementen eines Zeitpunktes t' berechnete Keplerische (elliptische) Bahn ist für alle Zeitpunkte t definiert. Man nennt sie die *oskulierende Bahn* zum Zeitpunkt t' . Die tatsächliche (gestörte) und die oskulierende Bahn berühren sich zum Zeitpunkt t' , weisen aber vor- und nachher normalerweise keine weiteren gemeinsamen Punkte auf.

Mit den oskulierenden Bahnelementen können wir die Entwicklung einer Bahn als Funktion der Zeit unter dem Einfluss der Störungen *anschaulich* studieren. Die oskulierende Bahn zum Zeitpunkt t' ist nichts anderes, als die Bahn, welcher der Satellit folgen würde, wenn man für $t > t'$ sämtliche Störungen ausschalten würde. Die tatsächliche Bahn ist die *Envelope* (umhüllende Kurve) aller oskulierenden Bahnen. Die Satellitenbewegung kann also als Keplerbewegung mit zeitveränderlichen Bahnelementen interpretiert werden.

Die Abbildungen 5.1 bis 5.5 zeigen als Beispiel die oskulierenden Bahnelemente des GPS-Satelliten PRN14 über einen Zeitraum von 3 Tagen. Wir stellen fest, dass das Bild der oskulierenden Elemente über den Zeitraum weniger Umläufe von den *kurzperiodischen Störungen* geprägt wird. Diese kurzperiodischen Störungen beeinträchtigen die Analyse der oskulierenden Elemente, wenn man ein längeres Zeitintervall betrachten will. Deshalb führt man die *mittleren Bahnelemente* ein. Sei $I(t)$ eines der Bahnelemente:

$$I(t) \in \{a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), t_p(t)\} \quad (5.21)$$

Das zugehörige *mittlere Bahnelement* $\bar{I}(t; \Delta t(t))$, gemittelt über ein Zeitintervall $\Delta t(t)$

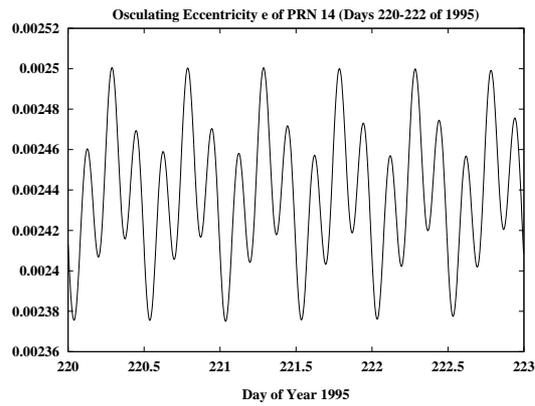


Abb. 5.2: Oskulierende Bahnelemente: Numerische Exzentrizität e .

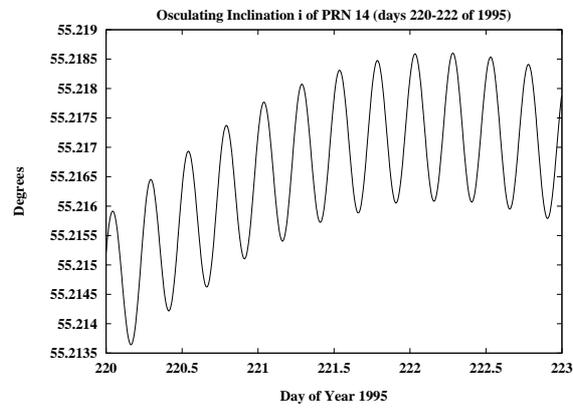


Abb. 5.3: Oskulierende Bahnelemente: Bahnneigung i .

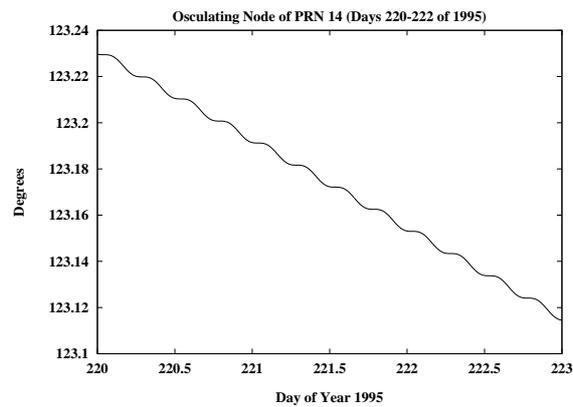


Abb. 5.4: Oskulierende Bahnelemente: Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω .

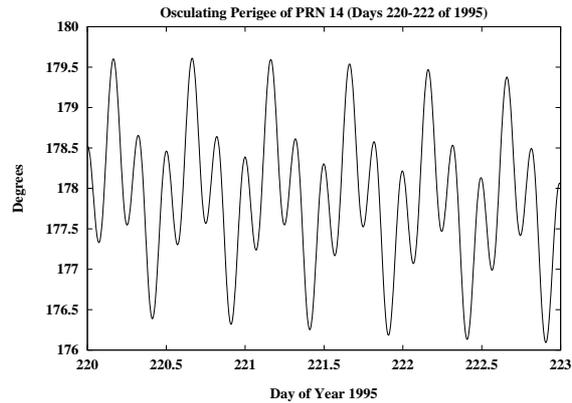


Abb. 5.5: Oskulierende Bahnelemente: Perigäumsabstand ω .

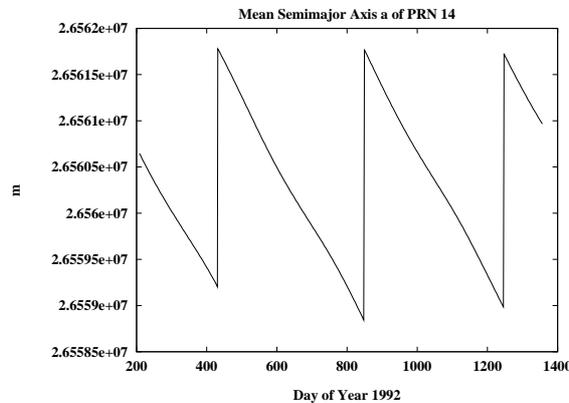


Abb. 5.6: Mittlere Bahnelemente: Grosse Halbachse a .

(das im allgemeinsten Fall eine Funktion der Zeit sein kann), definieren wir wie folgt:

$$\bar{I}(t; \Delta t(t)) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} I(t') dt' \quad (5.22)$$

Ist das Mittelungsintervall Δt gross gegenüber den Perioden der kurzperiodischen Störungen oder ist die Mittelungsperiode (in guter Näherung) ein ganzzahliges Vielfaches der Umlaufzeit, so werden die mittleren Bahnelemente (fast) keine kurzperiodischen Variationen mehr enthalten. Der Verlauf der mittleren Bahnelemente ist wesentlich ruhiger als derjenige der entsprechenden oskulierenden Elemente.

Als Beispiel zeigen die Abbildungen 5.6 bis 5.10 die mittleren Elemente des GPS-Satelliten PRN14, diesmal jedoch über einen Zeitraum von mehr als drei Jahren. Da die GPS-Satelliten in Resonanz mit der Erdrotation sind (2:1-Kommensurabilität: zwei Umläufe der Satelliten entsprechen genau einer Erddrehung), ändert sich die grosse Halbachse sehr stark und muss von Zeit zu Zeit mit einem Manöver wieder korrigiert werden (siehe Sprünge in Abb. 5.6). In der Bahnneigung (siehe Abb. 5.8)

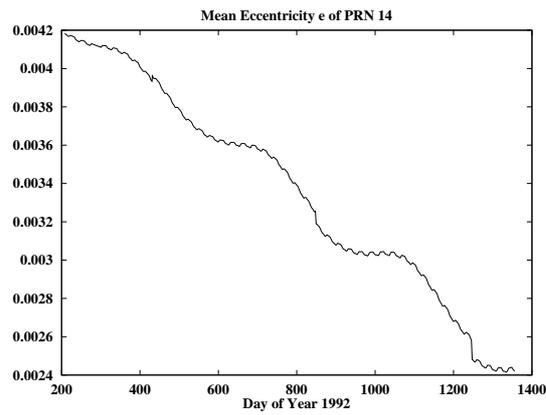


Abb. 5.7: Mittlere Bahnelemente: Numerische Exzentrizität e .

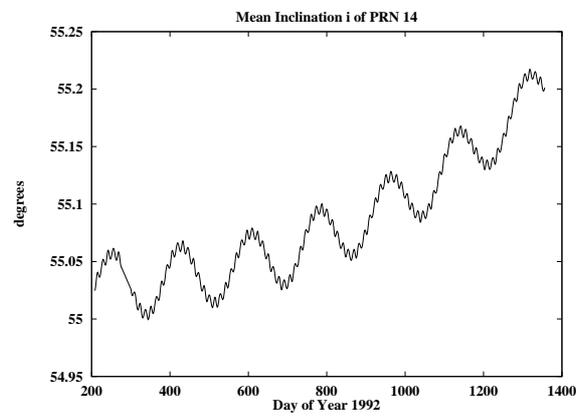


Abb. 5.8: Mittlere Bahnelemente: Bahnneigung i .

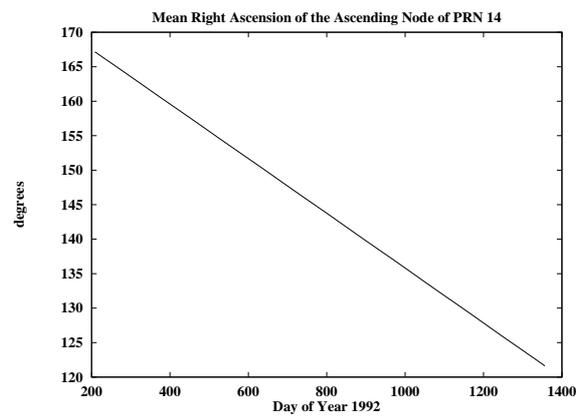
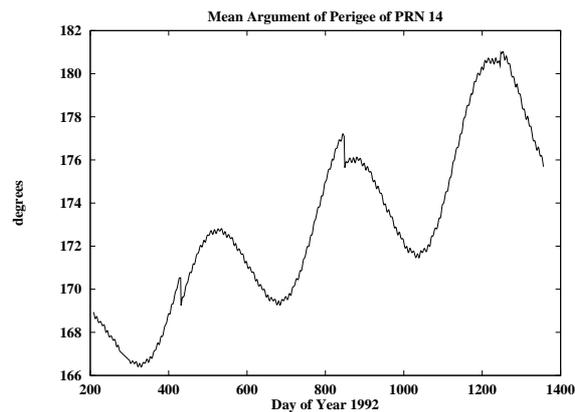


Abb. 5.9: Mittlere Bahnelemente: Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω .

Abb. 5.10: Mittlere Bahnelemente: Perigäumsabstand ω .

sehen wir deutlich die 14-täglichen und halbjährlichen Perioden aufgrund von Störungen des Mondes und der Sonne. Die Knotenlänge (siehe Abb. 5.9) zeigt die sogenannte Knotendrehung (rückläufig; ca. 14.5° pro Jahr) als Folge der Abplattung der Erde. Die Sprünge in Abbildung 5.10 sind auf Manöver zurückzuführen.

5.4 Störungsrechnung

Sämtliche Methoden zur Lösung des Anfangswertproblems (5.17, 5.18) werden unter dem Begriff *Störungsrechnung* zusammengefasst. Man unterscheidet zwischen

- **allgemeiner Störungsrechnung**, bei der man genäherte *analytische Lösungen* sucht, und
- **spezieller Störungsrechnung**, bei der man eine *numerische Approximation* der Aufgabe sucht.

In beiden Fällen handelt es sich um *Näherungslösungen*, allerdings von verschiedener Qualität: Bei der allgemeinen Störungsrechnung besteht die Näherung darin, dass man die Reihenentwicklungen für die Störfunktionen (die Potentiale auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (5.17)) irgendwo abbrechen muss, und dass man im allgemeinen nur Störungsrechnung bescheidener Ordnung betreibt. Bei der numerischen Lösung kommt die Näherung durch die Akkumulation der *Rundungsfehler* und *Formelfehler* zustande. Rundungsfehler ergeben sich infolge der Zahlendarstellung, Formelfehler durch den Approximationsansatz der numerischen Integration. Die Beurteilung der Qualität der Lösungen ist in beiden Fällen ein Problem – jedenfalls bei Integration über sehr lange Zeiträume.

5.4.1 Spezielle Störungsrechnung

Bei der speziellen Störungsrechnung werden die Bewegungsgleichungen (Anfangswertproblem (5.17, 5.18)) mittels numerischer Integration gelöst. Die Grundgleichungen

sind *gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung* in der Zeit t und haben die allgemeine Form

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}(t_0) &= \mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0\end{aligned}\tag{5.23}$$

Leonard Euler (1707–1783) hat im Jahre 1768 die noch heute gültigen Prinzipien der numerischen Integration im Kapitel *De integratione aequationum differentialium per approximationem* formuliert:

- In der Umgebung der Ausgangsepoche t_0 kann die Lösungsfunktion $\mathbf{r}(t)$ durch eine Taylorreihe bis zur Ordnung 2 approximiert werden:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t)\tag{5.24}$$

- Der Ansatz (5.24) wird zur Berechnung *neuer Anfangswerte* an der Stelle $t_0 + h_0$ verwendet. h_0 wird dabei die (momentane) Schrittweite der Integration genannt. Die neuen Anfangswerte lauten:

$$\mathbf{r}(t_0 + h_0) = \mathbf{r}_0 + h_0 \dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{2} h_0^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t_0)\tag{5.25}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0 + h_0) = \dot{\mathbf{r}}_0 + h_0 \mathbf{f}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t_0)\tag{5.26}$$

- Mit den neuen Anfangswerten kann die Integration sinngemäss durch Ersetzen des Zeitpunktes t_0 durch den Zeitpunkt $t_1 := t_0 + h_0$ weitergeführt werden, beispielsweise bis zum Zeitpunkt $t_2 := t_1 + h_1$. Die Lösung wird dann im Teilintervall $I_1 = [t_1, t_2]$ wieder durch eine nach den Termen 2. Ordnung abgebrochene Taylorreihe dargestellt.
- Das betrachtete Integrationsintervall kann im Prinzip “beliebig fein” unterteilt werden. Wir erwarten, dass die numerische Lösung bei feinerer Unterteilung immer genauer wird.

Es gibt heute eine Vielzahl verschiedener Integrationsverfahren. Sie unterscheiden sich vom Eulerschen Verfahren im wesentlichen dadurch, dass die Approximation (5.24) durch eine genauere Darstellung ersetzt wird. Typischerweise wird eine Taylorreihendarstellung bis zur Ordnung $q = 10, 11$ oder 12 gewählt. Dadurch kann die Integration — bei gleichbleibender Genauigkeit — in längeren und damit in weniger Schritten durchgeführt werden.

Die Genauigkeit des Verfahrens ist einerseits beschränkt durch die Rundungsfehler, andererseits durch die vernachlässigten Terme der Taylorreihe. Mit Hilfe des letzten im Ansatz noch vorhandenen Terms der Taylorreihe lässt sich der Fehler abschätzen. Es besteht dann die Möglichkeit, durch Verkleinerung der momentanen Schrittweite h_i den Fehler der lokalen Approximation klein zu halten.

5.4.2 Allgemeine Störungsrechnung

Im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt der ‘speziellen Störungsrechnung’ sucht man bei der allgemeinen Störungsrechnung die Lösung der Bewegungsgleichungen (5.17, 5.18) in der Gestalt *analytischer* (formelmässiger) Näherungen.

Wie wir bereits wissen, sind die Keplerschen Bahnelemente Integrationskonstanten der ungestörten Bewegungsgleichung (5.7):

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{f}_0 \quad (5.27)$$

Die Bewegungsgleichung der gestörten Bahn können wir schreiben als

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \quad (5.28)$$

wobei \mathbf{f}_1 sämtliche Störbeschleunigungen beinhaltet.

Wir bezeichnen nun mit $I(t)$ wiederum irgendeines der Bahnelemente (siehe (5.21)) und zur Vereinheitlichung der Schreibweise setzen wir

$$\{I_1(t), I_2(t), I_3(t), I_4(t), I_5(t), I_6(t)\} = \{a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), t_p(t)\} \quad (5.29)$$

im Sinne einer Äquivalenz zweier geordneter Mengen. Wenn wir ein beliebiges Bahnelement betrachten, werden wir den Index weglassen. Verwenden wir einen Index, so ist darunter das Bahnelement gemäss Definition (5.29) zu verstehen.

Unsere Definitionsgleichung (5.20) für die oskulierenden Bahnelemente bedeutet, dass ein beliebiges dieser Bahnelemente in der Form

$$I(t) = I(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) \quad (5.30)$$

d.h. als Funktion von Ort und Geschwindigkeit geschrieben werden kann. Die Zeitabhängigkeit von $I(t)$ ist nur indirekt über die Zeitabhängigkeit des Orts- und Geschwindigkeitsvektors gegeben. Die Differentialgleichung für $I(t)$ erhalten wir durch totale Ableitung der Gleichung (5.30) nach der Zeit. Diese Ableitung hat unter Verwendung der Kettenregel zu erfolgen:

$$\dot{I} = \sum_{l=1}^3 \left\{ \frac{\partial I}{\partial r_l} \dot{r}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{r}_l} \ddot{r}_l \right\} = \nabla_r I \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla_v I \cdot \ddot{\mathbf{r}} \quad (5.31)$$

Dabei verstehen wir unter $\nabla_r I$ den Gradienten der skalaren Funktion I im Ortsraum, unter $\nabla_v I$ den Gradienten im Geschwindigkeitsraum.

Gleichung (5.31) können wir weiter umformen, indem wir die zweite Ableitung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ auf der rechten Seite durch die rechte Seite der Bewegungsgleichung (5.28) ersetzen:

$$\dot{I} = \nabla_r I \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla_v I \cdot \{\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1\} \quad (5.32)$$

Da I eine Integrationskonstante des ungestörten Problems (5.27) ist, gilt natürlich

$$\nabla_r I \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla_v I \cdot \mathbf{f}_0 = 0 \quad (5.33)$$

und es folgt

$$\dot{I} = \nabla_v I \cdot \mathbf{f}_1 \quad (5.34)$$

Das vollständige Differentialgleichungssystem lautet also:

$$\dot{I}_k = \nabla_v I_k \cdot \mathbf{f}_1 \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.35)$$

Das Differentialgleichungssystem (5.35) ist ein gekoppeltes System von 6 nicht-linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es ist äquivalent zum ursprünglichen System (5.28). Die Lösungen von (5.35) und (5.28) sind vom mathematischen Standpunkt aus gesehen identisch.

Die Störungsgleichungen (5.35) stellen die wohl allgemeinste Schreibweise der *Gauss'schen Störungsgleichungen* dar. Als Illustration wollen wir die Störungsgleichung für die grosse Halbachse a der Bahn herleiten.

Wir gehen dabei vom Energie-Erhaltungssatz für die elliptische Bewegung aus, so wie er in der Himmelsmechanik verwendet wird:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (5.36)$$

Dabei ist $\mu = GM$ oder $\mu = G(M+m)$, falls die Masse m nicht vernachlässigt werden darf. Nach a aufgelöst erhalten wir

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (5.37)$$

Bildet man auf beiden Seiten den Gradienten ∇_v , so folgt (mit $\frac{2\mu}{r}$ unabhängig von v)

$$\begin{aligned} \nabla_v \left(\frac{\mu}{a} \right) &= \nabla_v \left(\frac{2\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 \right) \\ -\frac{\mu}{a^2} \nabla_v a &= -2\dot{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (5.38)$$

oder

$$\nabla_v a = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \quad (5.39)$$

Die Störungsgleichung in a lautet also gemäss (5.35):

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_1 \quad (5.40)$$

Auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems (5.35) finden wir nur Skalarprodukte, die invariant gegenüber Translationen und Rotationen des Koordinatensystems sind. Wir dürfen daher den Störungsvektor \mathbf{f}_1 in drei orthogonale, zeitabhängige Komponenten zerlegen, z.B. in radialer Richtung R , in Bewegungsrichtung S in der Bahnebene (normal zur Richtung R) sowie in Richtung W normal zur Bahnebene. In dieser Zerlegung gilt für die Störbeschleunigung

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} R \\ S \\ W \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

und für die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$

$$\dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{u} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \begin{pmatrix} e \sin v \\ \frac{p}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

wobei

u Argument der Breite ($u = \omega + v$)

v Wahre Anomalie

p Parameter des Kegelschnitts, $p = a(1 - e^2)$ für die Ellipse

Mit der Beziehung (5.42) erhalten wir schliesslich die Störungsgleichung (5.40) für a :

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2a}{1 - e^2} \left(e \sin v \cdot R + \frac{p}{r} \cdot S \right) \quad (5.43)$$

Die Störungsgleichungen der anderen Bahnelemente kann man ähnlich herleiten. Zusammengefasst ergeben sich die folgenden *Gauss'schen Störungsgleichungen*:

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2a}{1 - e^2} \left[e \sin v \cdot R + \frac{p}{r} \cdot S \right] \quad (5.44a)$$

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin v \cdot R + (\cos v + \cos E) \cdot S \right] \quad (5.44b)$$

$$\dot{i} = \frac{r \cos u}{n a^2 \sqrt{1 - e^2}} \cdot W \quad (5.44c)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r \sin u}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \cdot W \quad (5.44d)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos v \cdot R + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot S \right] - \cos i \dot{\Omega} \quad (5.44e)$$

$$\dot{t}_p = -\frac{1 - e^2}{n^2 a e} \left[\left(\cos v - 2e \frac{r}{p} \right) \cdot R - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot S \right] - \frac{3}{2a} (t - t_p) \dot{a} \quad (5.44f)$$

Dabei ist $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ die mittlere Bewegung (Winkelgeschwindigkeit) des Satelliten. Die Wahl der sechs Bahnelemente ist nicht eindeutig. Oft wird (insbesondere bei fast kreisförmigen Bahnen) anstelle der Perigäumsdurchgangszeit t_p die mittlere Anomalie

$$M_0 = n (t_0 - t_p) \quad (5.45)$$

verwendet. Die entsprechende Störungsgleichung lautet dann:

$$\dot{M}_0 = \frac{1 - e^2}{n a e} \left[\left(\cos v - 2e \frac{r}{p} \right) \cdot R - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \cdot S \right] + \frac{3}{2} \frac{n}{a} (t - t_0) \dot{a} \quad (5.46)$$

Es ist interessant zu bemerken, dass die Störungsgleichungen für die Bahnelemente, die die Form und Dynamik der Bahn beschreiben (a, e, t_p), nur die Störbeschleunigungen R und S in der Bahnebene enthalten. Veränderungen in der Orientierung der

Ellipse im Raum (i, Ω, ω) hängen jedoch von allen drei Störkomponenten ab.

Eine alternative Darstellung der Störungsgleichungen erhält man, wenn die Störbeschleunigung \mathbf{f}_1 in (5.28) als Gradient eines skalaren Potentials \tilde{R} geschrieben werden kann:

$$\mathbf{f}_1 = \nabla_r \tilde{R} \quad (5.47)$$

Unter dieser Voraussetzung lassen sich die sogenannten *Lagrangeschen Störungsgleichungen* herleiten. Sie haben die folgende Form:

$$\dot{a} = -\frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t_p} \quad (5.48a)$$

$$\dot{e} = -\frac{L^2}{\mu^2 e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t_p} - \frac{1-e^2}{eL} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} \quad (5.48b)$$

$$\dot{i} = \frac{1}{L \sin i} \left(\cos i \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \omega} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Omega} \right) \quad (5.48c)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{L \sin i} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} \quad (5.48d)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1-e^2}{eL} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} - \frac{e \cos i}{(1-e^2) \sin i} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} \quad (5.48e)$$

$$\dot{t}_p = \frac{2a^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} + \frac{L^2}{\mu^2 e} \cdot \frac{\partial \tilde{R}}{\partial e} \quad (5.48f)$$

mit

$$L = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \quad (5.49)$$

Um die rechten Seiten berechnen zu können, muss man allerdings zuerst die Störbeschleunigung \tilde{R} als Funktion der Bahnelemente darstellen.

5.4.3 Störungsrechnung erster Ordnung

Auf den rechten Seiten der Störungsgleichungen (5.44) und (5.48) treten nur "kleine" Beschleunigungen proportional zum Störterm \tilde{R} (bzw. zu dessen partieller Ableitung) auf. Man sieht sofort ein, dass diese beim Ausschalten der Störungen identisch verschwinden. Es ist deshalb verlockend, die Gleichungen (5.44) oder (5.48) *genähert* zu lösen, indem man zur Berechnung der rechten Seiten die Formeln der ungestörten Bewegung (Zweikörperproblem) verwendet. Dies bringt den Vorteil, dass die rechten Seiten als Funktionen der Zeit *a priori und nicht erst im Laufe der Integration* bekannt sind. Die Lösung eines gekoppelten Systems von 6 Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert sich auf die Lösung von 6 unabhängigen Integralen.

Macht man von dieser Näherung Gebrauch, so spricht man von *Störungsrechnung erster Ordnung*. Sie eignet sich sehr gut, um sich mit einfachen Mitteln einen Überblick über die Störungen in einem relativ kurzen Zeitintervall (max. einige 10 Umläufe) zu verschaffen.

5.4.4 Beispiel: Einfluss der Abplattung der Erde auf die Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens Ω

Die Störbeschleunigung \mathbf{f}_1 aufgrund der Abplattung der Erde, repräsentiert durch den Koeffizienten C_{20} der Kugelfunktionsentwicklung des Erdpotentials, lässt sich herleiten und ergibt

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} R \\ S \\ W \end{pmatrix} = \frac{3}{2} GM C_{20} \frac{a_E^2}{r^4} \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2} \sin^2 i + \frac{3}{2} \sin^2 i \cos 2u \\ \sin^2 i \sin 2u \\ \sin 2i \sin u \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

wobei $a_E \approx 6378140$ m den Äquatorradius der Erde bezeichnet.

Beschränken wir uns auf kreisähnliche Bahnen und vernachlässigen sämtliche Terme mit e (d.h. wir setzen $e = 0$ und $r = a$), so lautet die Gausssche Störungsgleichung (5.44d) für die Knotenlänge Ω :

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin u}{n a \sin i} \cdot W \quad (5.51)$$

Dabei ist gemäss (5.50)

$$W = \frac{3}{2} GM C_{20} \frac{a_E^2}{r^4} \sin 2i \sin u \approx 3n^2 a C_{20} \frac{a_E^2}{a^2} \sin i \cos i \sin u \quad (5.52)$$

Setzen wir diese Näherung in die genäherte Störungsgleichung (5.51) ein, so folgt:

$$\dot{\Omega} = \frac{3}{2} n \frac{a_E^2}{a^2} C_{20} \cos i (1 - \cos 2u) \quad (5.53)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert sofort

$$\Omega = \frac{3}{2} n \frac{a_E^2}{a^2} C_{20} \cos i \left[(t - t_0) - \frac{1}{2n} \sin 2u \right] + C_\Omega \quad (5.54)$$

wobei C_Ω die Integrationskonstante darstellt.

Da $C_{20} \approx -1082 \cdot 10^{-6}$ negativ ist, wird durch den Term mit $(t - t_0)$ in Gleichung (5.54) eine rückläufige Drehung des Knotens beschrieben. Umgerechnet in $^\circ/\text{Tag}$ (von Bogenmass pro Sekunde) erhält man aus (5.53)

$$\bar{\dot{\Omega}} [^\circ/\text{Tag}] = \frac{3 \cdot 180 \cdot 86400}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{a_E^3}} \left(\frac{a_E}{a}\right)^{7/2} C_{20} \cos i \approx -10^\circ \cos i \left(\frac{a_E}{a}\right)^{7/2} \quad (5.55)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass

$$n \frac{a_E^2}{a^2} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \cdot \frac{a_E^2}{a^2} = \sqrt{\frac{GM}{a_E^3}} \left(\frac{a_E}{a}\right)^{7/2} \quad (5.56)$$

Für einen GPS-Satelliten ($a \approx 26'500$ km, $i \approx 55^\circ$) erwarten wir also eine Knotendrehung von etwa

$$\bar{\dot{\Omega}} = 0.039 [^\circ/\text{Tag}] \quad (5.57)$$

oder etwa 14.3° pro Jahr. Wir können diesen mit der allgemeinen Störungsrechnung analytisch berechneten Wert nun mit Abbildung 5.9 (mittlere Knotenlänge) vergleichen und finden eine sehr schöne Übereinstimmung. In der Abbildung 5.4 (oskulierende Knotenlänge) sehen wir dagegen vorwiegend die kurzperiodischen Schwankungen, die in Formel (5.54) durch den Term mit $\sin 2u$ erfasst werden.

5.5 Bahnbestimmung

5.5.1 Problemstellung

Die Bewegungsgleichung eines Satelliten mit all den Störbeschleunigungen können wir laut Gleichung (5.28) schreiben als

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, q_1, q_2, \dots, q_d) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 = \mathbf{f} \quad (5.58)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(a, e, i, \Omega, \omega, t_p; t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (5.59)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(a, e, i, \Omega, \omega, t_p; t_0) = \mathbf{v}_0 \quad (5.60)$$

Dabei sind $a, e, i, \Omega, \omega, t_p$ die Keplerschen Bahnelemente zum Zeitpunkt t_0 . Die Schreibweise $\mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, q_1, q_2, \dots, q_d)$ soll zeigen, dass die Störbeschleunigung \mathbf{f}_1 nicht nur vom momentanen Ort \mathbf{r} und der momentanen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ abhängig ist, sondern zusätzlich von den sogenannten *dynamischen Parametern* q_1, q_2, \dots, q_d . Unter die dynamischen Parameter fallen alle unbekanntes (oder ungenau bekannten) Größen, die die Störbeschleunigung beschreiben und die deshalb aus den Beobachtungsdaten mitbestimmt werden müssen. Dazu gehören insbesondere

- Strahlungsdruckparameter, also Parameter die im Strahlungsdruckmodell enthalten sind,
- Parameter des Luftwiderstandes,
- Parameter des Gravitationsfeldes der Erde (Koeffizienten der Kugelfunktionsentwicklung)

und andere. Welche dieser Parametertypen mitbestimmt werden können oder müssen, hängt von den jeweils beobachteten Satelliten ab. Z.B. ist es bei GPS-Satelliten gewöhnlich nicht nötig, Koeffizienten des Gravitationsfeldes zu bestimmen, da diese von anderen Beobachtungstechniken (SLR) bereits sehr genau bekannt sind. Dagegen ist das Schätzen von Parametern eines Modells, das den Strahlungsdruck der Sonne charakterisiert, von entscheidender Bedeutung für die erreichbare Bahngenauigkeit. Bei SLR-Messungen zu tieffliegenden Satelliten müssen dagegen Gravitationsfeldkoeffizienten bestimmt werden.

Unter *Bahnbestimmung im allgemeinen Sinn* versteht man das Problem, die folgenden $n = 6 + d$ unbekanntes Parameter p_i zu bestimmen, die eine eindeutige (partikuläre) Lösung der obigen drei Gleichungen (5.58), (5.59) und (5.60) definieren:

$$\{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{a, e, i, \Omega, \omega, t_p, q_1, q_2, \dots, q_d\} \quad (5.61)$$

Die sechs Keplerschen Bahnelemente zur Zeit t_0 definieren die *Anfangsbedingungen* des Problems. An Stelle der 6 Keplerschen Elemente wäre es auch möglich, direkt

die Komponenten der Vektoren $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$ als Unbekannte aufzusetzen. Die Parameter q_1, q_2, \dots, q_d sind die dynamischen Parameter des Problems, die mitbestimmt werden müssen. Sämtliche Parameter p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) werden normalerweise aus den Beobachtungen eines globalen Netzes von Stationen geschätzt, wobei dazu gewöhnlich die Beobachtungen in einem bestimmten Zeitintervall $[t_0, t_1]$ verwendet werden. Wenn wir nur die Lösung für die Satellitenbahn in diesem Intervall betrachten, so sprechen wir von einem *Satellitenbogen* oder *Bahnbogen* der Länge $l = t_1 - t_0$.

5.5.2 Prinzip der Bahnbestimmung

Nehmen wir an, dass wir bereits eine *a priori Bahn* (Näherungsbahn) zur Verfügung haben, die wir durch numerische Integration der Gleichung (5.58) mit den Anfangsbedingungen (5.59) und (5.60) berechnet haben. (Sonst müssten wir eine sogenannte *erste Bahnbestimmung* durchführen, wie sie beispielsweise von Carl Friedrich Gauss (1777–1855) entwickelt wurde, um Kleinplanetenbahnen zu bestimmen, d.h. unter der Annahme, dass wir überhaupt keine Information über die Bahn hätten ausser den Beobachtungen.)

Die Näherungsbahn $\mathbf{r}_0(t)$ muss eine Lösung der Bewegungsgleichung (5.58) sein mit demselben Satz von Parametern, der in den Gleichungen (5.58), (5.59) und (5.60) aufgeführt wurde:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -GM \cdot \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3} + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, q_{10}, q_{20}, \dots, q_{d0}) =: \mathbf{f} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{r}_0(t_0) = \mathbf{r}(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, t_{p0}; t_0) \quad (5.63)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, t_{p0}; t_0) \quad (5.64)$$

$a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, t_{p0}$ und q_{i0} sind die *a priori Werte* (Näherungswerte) p_{i0} der zu bestimmenden Parameter p_i .

Wir können nun eine Linearisierung durchführen, indem wir die unbekannte Bahn $\mathbf{r}(t)$ in eine *Taylorreihe* entwickeln und die Reihe nach den linearen Termen abbrechen:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial p_i} \cdot (p_i - p_{i0}) \quad (5.65)$$

Wir sehen, dass in dieser Gleichung die unbekannte Bahn $\mathbf{r}(t)$ als *lineare Funktion* der unbekanntenen Parameter p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dargestellt wird.

Um die partiellen Ableitungen der Beobachtungen (Beobachtungsgleichung) nach den gesuchten Parametern zu erhalten — wir wollen hier exemplarisch wieder den Fall GPS betrachten mit den Beobachtungen L_E^S gemäss Beobachtungsgleichung (2.43); bei SLR- und LLR-Messungen sind in Analogie die Beobachtungsgleichungen (2.62) und (2.69) zu verwenden — brauchen wir den folgenden, durch die Kettenregel gegebenen Zusammenhang:

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial L_E^S}{\partial r_{0,k}} \cdot \frac{\partial r_{0,k}}{\partial p_i} \quad (5.66)$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial r_{0,k}} \quad (5.67)$$

der Beobachtung L_E^S nach dem Ort des Satelliten in (5.66) kann man elementar aus der Beobachtungsgleichung (2.43) berechnen (vergleiche auch Abschnitt 3.2.1). Die Satellitenposition kommt insbesondere im Distanz-Term

$$r_E^S = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}^S(t_E - \tau_E^S)| = |\mathbf{r}_E(t_E) - \mathbf{r}_0(t_E - \tau_E^S)| \quad (5.68)$$

vor. Dass sie daneben auch im Term $\delta\rho_{rel}$ enthalten ist, können wir bei der Berechnung der partiellen Ableitungen vernachlässigen, da dieser Korrekturterm gegenüber dem Hauptterm sehr klein ist. Es gilt also:

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \mathbf{r}_{0,k}} = \frac{\partial r_E^S}{\partial r_{0,k}} = -e_{E,k}^S \quad (5.69)$$

mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_E^S = (e_{E,1}^S, e_{E,2}^S, e_{E,3}^S)^T$, der von der Station zum Satelliten zeigt. In vektorieller Schreibweise gilt entsprechend

$$\frac{\partial L_E^S}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial r_E^S}{\partial \mathbf{r}_0} = -\mathbf{e}_E^S \quad (5.70)$$

Dass genau genommen die Satellitenposition auch noch in der Lichtlaufzeit τ_E^S steckt, die in der Distanz r_E^S vorkommt (siehe (5.68)), haben wir ebenfalls vernachlässigen können.

Das ist alles, was wir benötigen, um die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden. Aber wie berechnen wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial p_i} \quad (5.71)$$

in Gleichung (5.65) bzw. (5.66)?

Wir wollen zuerst die folgende Bezeichnung für die partielle Ableitung der Bahn $\mathbf{r}_0(t)$ nach einem der unbekannt Parameter $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ einführen:

$$\mathbf{z}(t) := \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial p} \quad (5.72)$$

Wenn wir die erste Ableitung der Bewegungsgleichung (5.62) nach dem Parameter p bilden, erhalten wir ein *Differentialgleichungssystem für die partiellen Ableitungen* $\mathbf{z}(t)$:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{z} + \mathbf{A}_1 \cdot \dot{\mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial p} \quad (5.73)$$

wobei \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_1 3x3 Matrizen sind mit den Elementen

$$A_{0,ik} = \frac{\partial f_i}{\partial r_{0,k}}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.74)$$

und

$$A_{1,ik} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{r}_{0,k}}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.75)$$

Wir haben hier f_i benutzt, um die Komponenten des Vektors $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ zu bezeichnen. Alle partiellen Ableitungen müssen mit der bekannten Näherungsbahn $\mathbf{r}_0(t)$ berechnet werden.

Die Gleichungen (5.73) heissen *Variationsgleichungen* (ein Gleichungssystem der Dimension 3 für jeden Parameter p) der ursprünglichen Bewegungsgleichungen (5.62). Diese ursprünglichen Gleichungen werden in diesem Zusammenhang oft auch als *Primärsystem* bezeichnet. Die *Anfangsbedingungen für die Variationsgleichungen* (5.73) erhält man, indem man die partielle Ableitung der Anfangsbedingungen (5.63) nach dem unbekanntem Parameter p bildet:

$$\mathbf{z}(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}_0(t_0)}{\partial p}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t_0) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)}{\partial p} \quad (5.76)$$

Für $p \in \{a, e, i, \Omega, \omega, t_p\}$ folgt

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}(t_0) \neq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t_0) \neq \mathbf{0} \quad (5.77)$$

wohingegen für $p \in \{q_1, q_2, \dots, q_d\}$ gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial p} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t_0) = \mathbf{0} \quad (5.78)$$

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir in einem Bahnbestimmungsschritt neben dem *nicht-linearen primären Differentialgleichungssystem* ((5.62), (5.63) und (5.64)) für jeden Parameter p_i ein *lineares Differentialgleichungssystem* ((5.73) und (5.76)) lösen müssen, um die partiellen Ableitungen $\mathbf{z}(t)$ der Bahn $\mathbf{r}(t)$ zu bekommen. Alle diese Differentialgleichungssysteme werden gewöhnlich mit den Methoden der *numerischen Integration* berechnet.

5.5.3 Partielle Ableitungen nach den Keplerschen Elementen

Wie bereits erwähnt, können sämtliche partiellen Ableitungen

$$\mathbf{z}(t) := \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial p} \quad (5.79)$$

der Bahn \mathbf{r}_0 nach den unbekanntem Parametern p_i durch numerische Integration des Differentialgleichungssystems (5.73) mit (5.76) berechnet werden. Falls man die Anfangsbedingungen mit den Keplerschen Elementen beschreibt (siehe (5.59) und (5.60)), so werden die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial a}, \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial e}, \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial i}, \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial \Omega}, \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial \omega}, \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial t_p} \quad (5.80)$$

oft mit der Keplerschen Näherungsbahn (Lösung des Zweikörperproblems), d.h. unter Vernachlässigung der Störbeschleunigung \mathbf{f}_1 in (5.62), analytisch berechnet.

5.5.4 Partielle Ableitungen nach den dynamischen Parametern

Als Beispiel für die Berechnung der in (5.73) vorkommenden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial p} \quad (5.81)$$

nach *dynamischen* Parametern, die in der Störbeschleunigung \mathbf{f}_1 auftauchen, wollen wir die Koeffizienten des Gravitationsfeldes und Strahlungsdruckparameter betrachten.

Die Beschleunigung \mathbf{a}_{grv} des Satelliten aufgrund des Gravitationsfeldes der Erde kann man gemäss (5.12) als Gradient des Gravitationspotentials V der Erde schreiben:

$$\mathbf{a}_{grv} = \nabla V = \nabla G \int_{Vol} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} dV \quad (5.82)$$

Diese Gleichung bezieht sich auf ein geozentrisches, nicht mit der Erde mitrotierendes Äquatorsystem (z.B. zur Epoche J2000.0). Wir möchten jedoch das Potential V in einem erdfesten System ausdrücken. Die Transformation zwischen dem Äquatorsystem zur Epoche J2000.0 und dem erdfesten System ist, wie wir bereits wissen (siehe (2.24)), gegeben durch

$$\mathbf{r} = \mathbf{PNUXY} \mathbf{r}_e \quad (5.83)$$

Dabei verwenden wir den Index e , um einen Vektor im erdfesten System zu bezeichnen. Diese Beziehung in (5.82) eingesetzt liefert

$$\mathbf{a}_{grv} = \mathbf{PNUXY} \nabla G \int_{Vol} \frac{\rho(\mathbf{R}_e)}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{R}_e|} dV = \mathbf{PNUXY} \nabla V_e \quad (5.84)$$

wobei V_e das Gravitationspotential der Erde in einem erdfesten System bezeichnet. Dieses wird gewöhnlich in Form von Kugelfunktionen dargestellt:

$$V_e(r, \lambda, \beta) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_E}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \beta) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right\} \quad (5.85)$$

mit

r, λ, β Polarkoordinaten (Radius, geozentrische Länge und Breite)

a_E Äquatorradius der Erde

C_{nm}, S_{nm} Koeffizienten des Erdpotentials

$P_n^m(\sin \beta)$ Zugeordnete Legendre-Funktionen

Wenn der Ursprung des Koordinatensystems im Massenzentrum gewählt wird und die z-Achse mit der Hauptträgheitsachse der Erde zusammenfällt, dann sind die Koeffizienten mit $n = 1$ sowie C_{21} und S_{21} alle Null.

Terme mit $m = 0$ heissen **zonale** Terme (nur breitenabhängig), Terme mit $n = m$ heissen **sektoriell** (nur längenabhängig) und solche mit $n > m \neq 0$ **tesseral**.

Für die Störbeschleunigung \mathbf{a}_{grv2} aufgrund der höheren Terme des Gravitationsfeldes (ohne Zentralterm) gilt analog Gleichung (5.84):

$$\mathbf{a}_{grv2} = \mathbf{PNUXY} \nabla V_{e,2} \quad (5.86)$$

wobei

$$V_{e,2} = V_e - \frac{GM}{r} \quad (5.87)$$

Für die Beschleunigung \mathbf{a}_{sd} aufgrund des Strahlungsdrucks der Sonne wird oft das folgende Modell verwendet:

$$\mathbf{a}_{sd} = \nu \left(P_s C_r \frac{A}{m_{sat}} a_{sun}^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sun}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sun}|^3} \right) \quad (5.88)$$

wobei

ν Schattenfaktor ($\nu = 1$, falls der Satellit in der Sonne ist; $\nu = 0$, falls sich der Satellit im Erdschatten befindet; $0 < \nu < 1$, falls sich der Satellit im Halbschatten befindet)

A Querschnittsfläche des Satelliten, von der Sonne aus gesehen

m_{sat} Masse des Satelliten

a_{sun} Astronomische Einheit (1 AE \approx 150 Millionen Kilometer)

$P_s = S/c$ Strahlungsdruck für einen perfekt absorbierenden Körper mit $A/m_{sat} = 1$ im Abstand 1 AE. S ist die Solarkonstante und c die Lichtgeschwindigkeit.

C_r Reflektionskoeffizient (materialabhängig)

$\mathbf{r}, \mathbf{r}_{sun}$ Geozentrische Koordinaten des Satelliten und der Sonne

Damit haben wir alle nötigen Bestandteile zusammen, um die partiellen Ableitungen der Störbeschleunigung

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{a}_{grv2} + \mathbf{a}_{sd} \quad (5.89)$$

nach den dynamischen Parametern, für diesen Fall mit nur zwei Störanteilen, zu berechnen.

Falls der Parameter p einen der zu bestimmenden Kugelkoeffizienten des Gravitationspotentials der Erde bezeichnet ($p = C_{nm}$ oder $p = S_{nm}$), so erhält man mit Hilfe von (5.86):

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial p} = \frac{\partial \mathbf{a}_{grv2}}{\partial p} = \mathbf{PNUXY} \nabla \left(\frac{\partial V_{e,2}}{\partial p} \right) \quad (5.90)$$

Die Ableitungen $\frac{\partial V_{e,2}}{\partial p}$ mit $p = C_{nm}$ oder $p = S_{nm}$ kann man mit den Gleichungen (5.87) und (5.85) leicht berechnen.

Falls der Parameter p ein dynamischer Parameter des Strahlungsdruckmodells ist — nehmen wir als Beispiel die Grösse C_r in Gleichung (5.88) — so gilt in diesem Fall:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial C_r} = \frac{\partial \mathbf{a}_{sd}}{\partial C_r} = \nu \left(P_s \frac{A}{m_{sat}} a_{sun}^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sun}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{sun}|^3} \right) = \frac{\mathbf{a}_{sd}}{C_r} \quad (5.91)$$

Sobald man die a priori Bahn \mathbf{r}_0 und alle partiellen Ableitungen berechnet hat, kann man die unbekannt Parameter und deren mittlere Fehler ganz gewöhnlich mit der Methode der Ausgleichsrechnung bestimmen (siehe Abschnitt 3.2).

5.5.5 Die Theorie von Kaula

Kaula gelang es in einer 1966 veröffentlichten Arbeit, das Gravitationspotential der Erde in trigonometrische Reihen zu entwickeln, deren Argumente die mittlere Anomalie M , die Länge des aufsteigenden Knotens Ω , das Argument des Perigäums ω und die Sternzeit θ sind. Wir können hier nur eine kurze Zusammenstellung der verschiedenen Schritte geben, die zu dieser Darstellung führen. Für eine genaue Herleitung verweisen wir auf den Originalartikel von [*Kaula*, 1966]. In einem ersten Schritt nehmen wir Gleichung (5.85) und drücken β und λ durch die Bahnelemente i , Ω und ω sowie die wahre Anomalie v aus. Wir erhalten für einen Term V_{nm} des Grades n und der Ordnung m des Störpotentials:

$$\begin{aligned} V_{nm} &= \frac{GM}{r} \left(\frac{a_E}{r} \right)^n P_n^m(\sin \beta) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \\ &= \frac{GM}{r} \left(\frac{a_E}{r} \right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) S_{nmp} \end{aligned} \quad (5.92)$$

mit

$$S_{nmp} = \begin{cases} C_{nm} \cos \psi_{nmp} + S_{nm} \sin \psi_{nmp} & , \text{ wenn } n - m \text{ gerade} \\ -S_{nm} \cos \psi_{nmp} + C_{nm} \sin \psi_{nmp} & , \text{ wenn } n - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.93)$$

und

$$\psi_{nmp} = (n - 2p)(\omega + v) + m(\Omega - \theta) \quad (5.94)$$

Während C_{nm} und S_{nm} die Geopotentialkoeffizienten bezeichnen, sind die S_{nmp} Produkte der Geopotentialkoeffizienten mit den Cosinus-Sinus-Funktionen des Winkelarguments ψ_{nmp} . Die Funktionen $F_{nmp}(i)$ werden *Bahnneigungsfunktionen* genannt. Eine explizite Darstellung der Funktionen $F_{nmp}(i)$ findet man in [*Kaula*, 1966] oder [*Seeber*, 1993].

In einem zweiten Schritt werden r und v durch Serien der Argumente a , e und M ersetzt. Dies führt zu:

$$V_{nm} = \frac{GM}{a} \left(\frac{a_E}{r} \right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{nmpq}(e) S_{nmpq}(\omega, M, \Omega, \theta) \quad (5.95)$$

mit

$$S_{nmpq} = \begin{cases} C_{nm} \cos \psi_{nmpq} + S_{nm} \sin \psi_{nmpq} & , \text{ wenn } n - m \text{ gerade} \\ -S_{nm} \cos \psi_{nmpq} + C_{nm} \sin \psi_{nmpq} & , \text{ wenn } n - m \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.96)$$

und

$$\psi_{nmpq} = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) \quad (5.97)$$

Die Gestalt der *Exzentrizitätsfunktionen* $G_{npq}(e)$ findet man wiederum in [Kaula, 1966] oder [Seeber, 1993]. Die Funktionen $G_{npq}(e)$ sind proportional zu $e^{|q|}$ und gehen (wegen $e \ll 1$) folglich für steigende Ordnungen q schnell gegen Null. Wir können nun die Terme V_{nm} gemäss (5.95) in die Lagrangeschen Störungsgleichungen (5.48) einsetzen, wobei wir die skalare Potentialfunktion \bar{R} durch die verschiedenen Terme V_{nm} ersetzen. Die Integration über eine endliche Zeitspanne liefert dann die Änderung eines Bahnelements aufgrund der Wirkung eines einzelnen $nmpq$ -Terms des Störpotentials:

$$\begin{aligned} \Delta a_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{2 F_{nmp} G_{npq} (n - 2p + q) S_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+2} \dot{\psi}_{nmpq}} \\ \Delta e_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{F_{nmp} G_{npq} [(1 - e^2)(n - 2p + q) - (1 - e^2)^{1/2}(n - 2p)] S_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+3} e \dot{\psi}_{nmpq}} \\ \Delta i_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{F_{nmp} G_{npq} [(n - 2p) \cos i - m] S_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+3} (1 - e^2)^{1/2} \sin i \dot{\psi}_{nmpq}} \\ \Delta \Omega_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{F'_{nmp} G_{npq} \bar{S}_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+3} (1 - e^2)^{1/2} \sin i \dot{\psi}_{nmpq}} \\ \Delta \omega_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{[(1 - e^2)^{1/2} e^{-1} F_{nmp} G'_{npq} - \cot i (1 - e^2)^{1/2} F'_{nmp} G_{npq}] \bar{S}_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+3} \dot{\psi}_{nmpq}} \\ \Delta M_{nmpq} &= GM a_E^n \frac{F_{nmp} [2(n + 1)G_{npq} - (1 - e^2) e^{-1} G'_{npq}] G'_{npq} \bar{S}_{nmpq}}{\bar{n} a^{n+3} \dot{\psi}_{nmpq}} \end{aligned} \quad (5.98)$$

mit

$$F'_{nmp} = \frac{\partial F_{nmp}}{\partial i} \quad (5.99a)$$

$$G'_{npq} = \frac{\partial G_{npq}}{\partial e} \quad (5.99b)$$

$$\dot{\psi}_{nmpq} = (n - 2p)\dot{\omega} + (n - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{\theta}) \quad (5.100)$$

\bar{n} bezeichnet dabei die mittlere Bewegung und \bar{S}_{nmpq} das Integral von S_{nmpq} über das Integrationsargument (Ω, ω, M) . Den obigen Formeln liegt die wichtige Annahme zugrunde, dass die einzigen Variationen der Elemente auf der rechten Seite der Störungsgleichungen die *säkularen Änderungen* $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, \dot{M} sind und jegliche anderen zeitlichen Änderungen von Grössen, die nicht die Bahn beschreiben, wie beispielsweise die Rotationsrate der Erde $\dot{\theta}$.

Bahnelement	Säkulare Störung	Langper. Störung	Kurzper. Störung
a	–	–	x
e	–	x	x
i	–	x	x
Ω	x	x	x
ω	x	x	x
M	x	x	x

Tabelle 5.2: Störungen in den Bahnelementen

Offensichtlich werden die Änderungen in den Bahnelementen durch die zeitlichen Änderungen $\dot{\psi}_{nmpq}$ (siehe (5.100)) des Winkelarguments ψ_{nmpq} gesteuert.

Setzen wir $n - 2p = n - 2p + q = m = 0$ (d.h. keine periodischen Änderungen), so folgt aus den Gleichungen (5.98) die Feststellung, dass nur *zonale* Koeffizienten *säkulare Störungen* hervorrufen.

Langperiodische Störungen in allen Bahnelementen (mit Ausnahme von a) werden durch alle zonalen Koeffizienten verursacht. Sie äussern sich z.B. in einer Drehung der Apsidenlinie. Es gilt:

$$n - 2p \neq 0, \quad n - 2p + q = 0, \quad m = 0 \quad (5.101)$$

Kurzperiodische Störungen in allen Bahnelementen (Perioden von der Dauer des Satellitenumlaufs (M), der Erddrehung ($\Omega - \theta$) oder des Sterntags/m (m)) treten auf, wenn gilt:

$$n - 2p + q \neq 0, \quad m \neq 0 \quad (5.102)$$

Die Störungsarten sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Ein interessantes Phänomen in diesem Zusammenhang sind Resonanzen. Resonanzen können auftreten, wenn die Erddrotationsdauer ein ganzzahliges Vielfaches der Umlaufzeit des Satelliten ist. Nach einer vorgegebenen Zahl von Erdumkreisungen überfliegt der Satellit somit exakt die gleiche Region der Erde und erfährt eine gleiche Störung. Dieser immer wiederkehrende, sich verstärkende Effekt, wird Resonanz genannt. Ein Satellit mit l Umläufen pro Tag ist somit besonders sensitiv auf die Wirkung von tesseralen Koeffizienten C_{nl} und S_{nl} . Umgekehrt lassen sich die Resonanzkoeffizienten auch besonders genau aus Abweichungen der Satellitenbahn bestimmen. Mathematisch gesehen wird im Resonanzfall der Wert der Winkelfunktionsänderung $\dot{\psi}_{nmpq} \approx 0$ für $m \neq 0$ (siehe (5.100)). Für $q = 0$ tritt dieser Fall ein, falls

$$k(\dot{\omega} + \dot{M}) = l(\dot{\theta} - \dot{\Omega}) \quad (5.103)$$

wobei k und l ganze Zahlen sind. Die Gleichung (5.103) ist die exakte Bedingung für die Kommensurabilität: der Satellit kreuzt k -mal den aufsteigenden Knoten während

sich die Erde l -mal relativ zur Bahnebene des Satelliten dreht. Während diese “tiefe” Resonanz meist nicht exakt erfüllt ist (kann als kurzfristiges Ereignis angesehen werden), sind vor allem tieffliegende Satelliten während ihrer aktiven Zeit einigen Resonanzen (und den damit verbundenen Bahnstörungen) ausgesetzt.

Literatur

- Arias, E. F., P. Charlot, M. Feissel, and J.-F. Lestrade (1995), The Extragalactic Reference System of the International Earth Rotation Service, ICRS, *Astron. Astrophys.*, *119*, 604–608.
- Bauer, M. (1997), *Vermessung und Ortung mit Satelliten*, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 4th edition.
- Beutler, G. (1999), *Himmelsmechanik des erdnahen Raumes*, Vorlesungsskriptum, Astronomisches Institut, Universität Bern, Druckerei der Universität Bern.
- Beutler, G., M. Rothacher, S. Schaer, T. A. Springer, J. Kouba, and R. E. Neilan (1999), The International GPS Service (IGS): An interdisciplinary Service in Support of Earth Sciences, *Advances in Space Research*, *23*(4), 631–653.
- Bevis, M., S. Businger, T. A. Herring, C. Rocken, R. A. Anthes, and R. H. Ware (1992), GPS Meteorology: Remote Sensing of Atmospheric Water Vapor Using the Global Positioning System, *J. Geophys. Res.*, *97*(D14), 15787–15801.
- Blewitt, G. (1997), Basics of the GPS technique: Observation equations, in *Geodetic Applications of GPS*, edited by B. Jonsson, pp. 9–54, National Land Survey of Sweden.
- Brunner, F. K., and M. Gu (1991), An improved model for dual frequency ionospheric correction of GPS observations, *Manuscr. Geod.*, *16*(3), 205–214.
- DeMets, C., R. G. Gordon, D. Argus, and S. Stein (1990), Current Plate Motions, *Geophys. J. Int.*, *101*, 425–478.
- DeMets, C., R. G. Gordon, D. Argus, and S. Stein (1994), Effects of revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions, *Geophys. Res. Lett.*, *21*, 2191–2194.
- Elgered, G. (1993), Tropospheric radio path delay from ground-based microwave radiometry, in *Atmospheric Remote Sensing by Microwave Radiometry*, edited by M. A. Janssen, pp. 215–258, Wiley & Sons, New York.
- Helmert, R. F. (1880), *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie*, B.E. Teubner, Leipzig, (Nachdruck Minerva, Frankfurt, 1962).
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger, and J. Collins (1997), *Global Positioning System — Theory and Practice*, Springer Verlag, Wien New York, 4th edition.
- JGR (1994), *J. Geophys. Res.*, *99*.
- Kahmen, H. (1977), *Elektronische Messverfahren in der Geodäsie*, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Kaula, W. M. (1966), *Theory of Satellite Geodesy*, Blaisdell, Waltham, MA.
- Kouba, J. (1983), A review of geodetic and geodynamic satellite Doppler positioning, *Rev. Geophys. Space Phys.*, *21*, 27–40.
- Marini, J. W., and C. W. Murray (1973), Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees, *NASA Report X-591-73-351*, Goddard Space Flight Center.
- McCarthy, D. D. (1996), IERS Conventions (1996), *IERS Tech. Note 21*, Obs. de Paris, Paris, July 1996.
- Milani, A., A. M. Nobili, and P. Farinella (1987), *Non-Gravitational Perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, ISBN 0-85274-538-9, Bristol, BS1 6NX, England.
- Moritz, H., and I.I. Mueller (1987), *Earth Rotation: Theory and Observation*, The Ungar Publishing Company, New York, NY, ISBN 0-8044-4671-7.
- Rabbel, W., and H. Schuh (1986), The Influence of Atmospheric Loading on VLBI Experi-

- ments, *Journal of Geophysics*, 59(3), 164–170.
- Schaer, S. (1999), *Mapping and Predicting the Earth's Ionosphere Using the Global Positioning System*, Ph.D. dissertation, Astronomical Institute, University of Berne, Berne, Switzerland.
- Scherneck, H.-G. (1991), A parametrized solid earth tide model and ocean tide loading effects for global geodetic baseline measurements, *Geophys. J. Int.*, 106, 677–694.
- Schrama, E. J. O. (1989), *The role of orbit errors in processing of satellite altimeter data*, Ph.D. dissertation, Delft University of Technology.
- Seeber, G. (1989), *Satellitengeodäsie: Grundlagen, Methoden und Anwendungen*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, ISBN 3-11-010082-7.
- Seeber, G. (1993), *Satellite Geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, ISBN 3-11-012753-9.
- Tapley, B. D., G. H. Born, and M. E. Parke (1982), The Seasat altimeter data and its accuracy assessment, *J. Geophys. Res.*, 87, 3179–3188.
- Teunissen, P. J. G., and A. Kleusberg (eds.) (1998), *GPS for Geodesy*, Lecture notes of the International School *GPS for Geodesy* in Delft, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2nd edition.
- Thayer, G. (1974), An improved equation for the radio refractive index of air, *Radio Science*, 9(10), 803–807.
- Wahr, J. M. (1981), The forced nutation of an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 64, 705–727.
- Wild, U. (1994), *Ionosphere and Geodetic Satellite Systems, Permanent GPS Tracking Data for Modelling and Monitoring*, Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, Band 48.