

1 Einführung in die Satellitengeodäsie

1.1 Methodenüberblick

Eine wichtige Zielsetzung der Geodäsie besteht in der Bestimmung der Figur der Erde und seines äußeren Gravitationsfeldes als Funktion der Zeit aus Beobachtungen im Außenraum und an der Erdoberfläche. Die Gesamtheit der Modellbildungsverfahren, bei der künstliche Erdsatelliten beteiligt sind, wird unter der Thematik der Satellitengeodäsie zusammengefaßt. Der Geburtstag der Satellitengeodäsie ist der 4. Oktober 1957. An diesem Tag wurde der russische Satellit Sputnik 1 in eine Erdumlaufbahn gebracht. Im gleichen Jahr konnte aus visuellen Beobachtungen der Bahn des Satelliten Sputnik 2 die nur ungenau bekannte (statische) Abplattung der Erde verbessert werden. Im Jahre 1959 konnte durch die Analyse der Messungen des Doppler-Effektes der Signale des amerikanischen Satelliten Vanguard die Äquatorabplattung des Gravitationsfeldes nachgewiesen werden. Seitdem hat die Nutzung künstlicher Erdsatelliten enorme Fortschritte gemacht und in zahlreichen Disziplinen der Geowissenschaften zu großartigen Ergebnissen geführt, deren Auswirkungen bis in das tägliche Leben zu spüren sind.

Die Satellitengeodäsie kann als Teil eines allgemeinen Erderkundungsprogrammes betrachtet werden. Ein solches Erderkundungsprogramm umfaßt verschiedene Bereiche geowissenschaftlicher Disziplinen wie die Geophysik, die Meteorologie und die Fernerkundung der Oberfläche der festen Erde, der Eisregionen und der Ozeane. Sie ist keine selbständige wissenschaftliche Disziplin, sondern stellt einen Verbund von Verfahren zur Erreichung geodätischer Zielsetzungen dar. Der Beitrag der Satellitengeodäsie besteht in der Verwendung künstlicher Satelliten als

- Hochziele und als
- Testkörper im Gravitationsfeld der Erde sowie als
- Plattform oder Träger von Sensoren zur Ausmessung des Systems Erde.

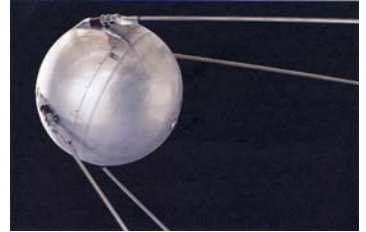
Die Methoden der geometrischen Satellitengeodäsie machen keinen oder nur untergeordneten Gebrauch von der Dynamik der Satellitenbewegung. Die Verwendung von künstlichen Erdsatelliten als Hochziele, deren Richtungsvektoren zu einer einheitlichen Epoche von mehreren Stationen aus gemessen werden, ist ein Beispiel einer geometrischen Anwendung der Satellitengeodäsie. Die Methoden der dynamischen Satellitengeodäsie umfassen all diejenigen Verfahren, bei denen die dynamischen Wechselwirkungen der Satelliten mit den einwirkenden Kraftfeldern gemessen und analysiert werden. Beispiele hierzu sind die Messung und Analyse der Bahnstörungen der Satelliten zufolge der Inhomogenität des Gravitationsfeldes oder die Ausmessung und Analyse des Gezeitenfeldes der Erde mit Hilfe der Satellitengravitationsgradiometrie. Alle drei Verwendungsmöglichkeiten künstlicher Erdsatelliten weisen einen geometrischen und einen dynamischen Aspekt auf. Die Tab. 1.1 gibt einen (unvollständigen) Überblick über verschiedene im oben genannten Sinne geodätisch nutzbarer Satelliten.

1.1.1 Satelliten als Hochziele

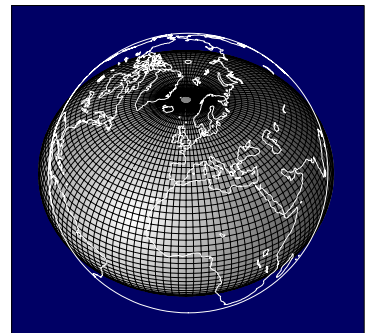
Satelliten können, ungeachtet ihrer Bewegung, als hochliegende Zielmarken betrachtet werden, die von Stationen, die ein dreidimensionales geodätisches Netz bilden, gleichzeitig beobachtet werden, deren Beobachtungen zumindest auf eine einheitliche Epoche bezogen werden können. Für die momentane Satellitenposition \mathbf{r} , dem momentanen Stationsort \mathbf{R}_S und dem topozentrischen Ortsvektor \mathbf{R} besteht die geometrische Grundgleichung (Abb. 1.1):

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_S. \quad (1.1)$$

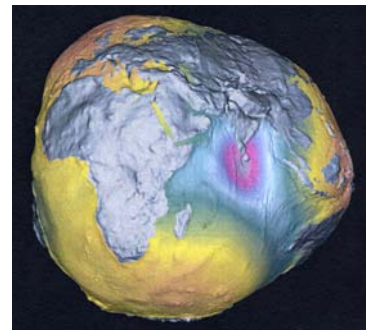
Die geozentrischen Örter \mathbf{r} und \mathbf{R}_S geben die momentane Lage des Satelliten und des Topozentrums an und in ihrer zeitlichen Abfolge konstituieren sie die Satellitenbewegung $\mathbf{r}(t)$ einerseits, andererseits die Bewegung des Topozentrums $\mathbf{R}_S(t)$, bezogen auf ein geozentrisch gelagertes (Quasi-) Inertialsystem. In Abhängigkeit von der beob-



Sputnik 1



Gravitationsfeld der Erde 1957: (überhöhte) statische Abplattung der Erde



Gravitationsfeld der Erde 2002 (nach einer Darstellung des GFZ Potsdam)



GPS-Satellit

sichtigten Zielgröße und den gegebenen Elementen bieten sich verschiedene Nutzungsmöglichkeiten an (Tab. 1.2). Diese Gleichung kann für eine Ephemeridenrechnung der Satelliten verwendet werden, für eine Bahnbestimmung der Satelliten oder für die Positionierung des Beobachtungsortes. Hierzu wird angenommen, daß jeweils zwei Bestimmungsstücke in der geometrischen Grundgleichung vollständig bekannt sind. Ist dies nicht der Fall, so sind weitere Beziehungen bzw. Bestimmungsstücke für die Ortsvektoren einzuführen. In der Regel sind dies die Bewegungsgleichungen für die Bahnen oder die Stationskoordinaten.

Tab. 1.1: Auswahl geodätisch nutzbarer Satelliten

Satellit	gestartet von/am	Anwendung	Flughöhe	Bahnneigung
AJISAI	Japan, NASDA, 12.08.1986	passiv, Geodäsie, \varnothing 2.15 m	1.400km	50 °
ERS 1	Europa, ESA, 17.07.1991	Fernerkundung	780km	98.5°
ERS 2	Europa, ESA, 21.04.1995	Fernerkundung	785km	98.5°
ETALON 1	Rußland, 10. 01. 1989	passiv, Geodäsie, \varnothing 1.294 m	19.120km	64.9°
ETALON 2	Rußland, 31. 05. 1989	passiv, Geodäsie, \varnothing 1.294 m	19.120km	65.5°
GEOS 3	USA, NASA, 9. 04. 1975	Radar Altimeter	824km	115.0°
GFO 1	USA, 10.02.1998	Radar Altimeter	800km	108°
GFZ	Deutschland, GFZ, 19. 04. 1995	passiv, Geodäsie, \varnothing 0.21m	398km	51.6°
GLONASS	Rußland	Satelliten-Navigationssystem	20.000km	3 Bahnebenen
GPS	USA	Satelliten-Navigationssystem	20.000km	3 Bahnebenen
LAGEOS 1	USA, NASA, 4. 05. 1976	passiv, Geodäsie, \varnothing 0.60m	5.860km	109.8°
LAGEOS 2	USA, NASA, 22. 10. 1992	passiv, Geodäsie, \varnothing 0.60m	5.620km	52.6°
Starlette	Frankreich, CNES, 6.02.1975	passiv, Geodäsie, \varnothing 0,29m	812km	50.0°
Stella	Frankreich, CNES, 26. 09. 1993	passiv, Geodäsie, \varnothing 0.29m	800km	98.6°
TOPEX/ POSEIDON	USA, NASA, Frankreich, CNES, 10. 08. 1992	Mikrowellen Altimeter, Fernerkundung	1.340km	66°
WESTPAC	Western Pacific Laser Tracking Network, 10. 07. 1998	passiv, Geodäsie, \varnothing 0.24m	835km	98°
ADEOS	Japan, NASDA, voraus. 2000	Umweltforschung	800 km	98°
CHAMP	Deutschland, GFZ, 15. 07. 2000	geophysik. Forschung	470km	63°
ENVISAT	ESA	Fernerkundung, Nachfolger von ERS	800km	98.5°

1.1.2 Satelliten als Testkörper im Gravitationsfeld der Erde

Im allgemeinen wird man einen künstlichen Erdsatelliten als einen ausgedehnten Körper betrachten, der sich in gravitativer Wechselwirkung mit der Erde und anderen Körpern befindet und der Einwirkung weiterer Volumen- und Oberflächenkräfte unterliegt. Die Bewegung eines ausgedehnten Körpers wird durch die Bilanzgleichungen für den Impuls,

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{K}, \quad (1.2)$$

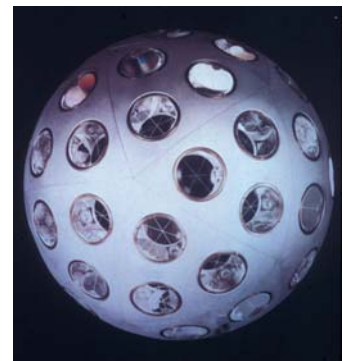
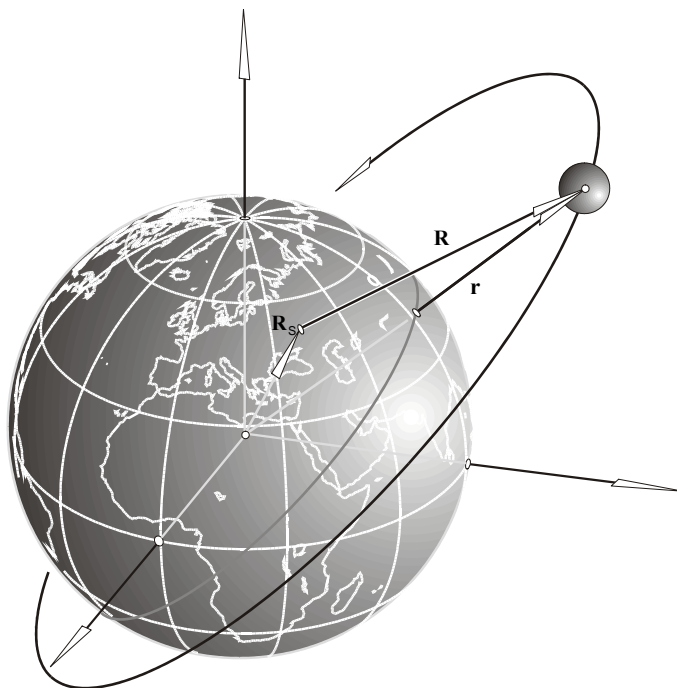
den Drehimpuls,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad (1.3)$$

und die Energie,

$$\dot{T} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{M}, \quad (1.4)$$

beschrieben. Die angegebenen Bilanzgleichungen beziehen sich auf den Massenmittelpunkt des Satelliten; d.h. die translatorische Bewegung des Satelliten wird durch die Bilanzgleichung für den Impuls des Massenmittelpunktes beschrieben und die rotatorische Bewegung durch die auf den Massenmittelpunkt bezogene Drehimpulsbilanz. Die Bilanzgleichung für die kinetische Energie gilt in der angegebenen Form nur für starre Körper. Sie macht die Kopplung von translatorischer und rotatorischer Bewegung klar.



Starlette

Abb. 1.1: Die geometrische Grundgleichung der Satellitengeodäsie.

Im folgenden soll nur die translatorische Bewegung des Satelliten interessieren. Dabei wird der Satellit im allgemeinen als Punktmasse betrachtet. Die zeitliche Änderungsrate des Impulses \mathbf{p} dieser punktförmigen Testmasse, $\dot{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/dt$, ist durch die Resultierende der Kräfte $\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ unter der Voraussetzung einer konstanten trägen Masse des Satelliten durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \quad (1.5)$$

gegeben. Auf künstliche Erdsatelliten wirkt dabei eine Vielzahl von Kräften, von denen die Gravitationskraft der Erde, $\mathbf{K}_{S\otimes}$, die dominierende ist:

$$\frac{1}{m} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = \frac{1}{m} \mathbf{K}_{S\otimes} + \frac{1}{m} \left(\mathbf{G}_{(S\otimes)\odot} + \mathbf{G}_{(S\otimes)\zeta} \right) + \frac{1}{m} \mathbf{K}_V + \frac{1}{m} \mathbf{K}_O. \quad (1.6)$$

Der Term

$$\frac{1}{m} \mathbf{K}_{S\otimes} = \mathbf{a}_K + \mathbf{a}_R \quad (1.7)$$

beschreibt die Gravitationsbeschleunigung der Erde, aufgespalten in die Gravitationsbeschleunigung durch den Zentralterm (Keplerterm) \mathbf{a}_K und durch das Störfeld $\mathbf{a}_R = \nabla R$, wobei R das Störpotential bedeutet. Der Term

$$\frac{1}{m} (\mathbf{G}_{(S\otimes)\oplus} + \mathbf{G}_{(S\otimes)\odot}) = \mathbf{a}_B \quad (1.8)$$

beschreibt die Beschleunigung durch Mond und Sonne im Sinne von Gezeitenbeschleunigungen.

Tab. 1.2: Nutzungsmöglichkeiten der geometrischen Grundgleichung der Satellitengeodäsie.

Gegeben	Zielgröße	Nutzungsmöglichkeit
\mathbf{r}, \mathbf{R}_S	\mathbf{R}	Ephemeridenrechnung
\mathbf{R}, \mathbf{R}_S	\mathbf{r}	Bahnbestimmung
\mathbf{r}, \mathbf{R}	\mathbf{R}_S	Positionsbestimmung

Das Störpotential wird durch geeignete Gravitationsfeldparameter, zumeist in Form von Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung des Störpotentials (Potentialkoeffizienten) modelliert. Sie sind die Zielgrößen der Satellitengeodäsie für die Gravitationsfeldbestimmung. Daneben müssen noch weitere Volumen- und Oberflächenkräfte, die auf den Satelliten wirken, modelliert werden. Gegebenenfalls müssen geeignete Modellparameter zusammen mit den Potentialkoeffizienten des Störpotentials mitbestimmt werden, obwohl sie i.a. nicht eigentliche Zielgrößen der Modellbildung sind. Die wichtigsten der zu berücksichtigenden **Volumenkräfte** \mathbf{K}_V ,

$$\frac{1}{m} \mathbf{K}_V = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_O, \quad (1.9)$$

die als „Störkräfte“ wirken, sind diejenigen, die sich durch die Deformation der Erde zufolge der Gezeitenbeschleunigung dritter Körper ergeben:

- \mathbf{a}_E Gezeitenbeschleunigung der festen Erde, die sich durch ihre Deformation ergibt,
- \mathbf{a}_O Ozean-Gezeitenbeschleunigung, die sich durch die Umlagerung der Wassermassen ergibt.

Die wichtigsten der durch **Oberflächen-Störkräfte** \mathbf{K}_O auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen,

$$\frac{1}{m} \mathbf{K}_O = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_A, \quad (1.10)$$

sind:

- \mathbf{a}_D Beschleunigung durch den Atmosphärenwiderstand,
- \mathbf{a}_S Beschleunigung durch den Strahlungsdruck der Sonne,
- \mathbf{a}_A Beschleunigung durch den Erdalbedo-Druck.

Die Tab. 1.3 gibt die Größenordnung der verschiedenen Beschleunigungen für einige wichtige Satelliten an. Die Tabelle zeigt, daß die Beiträge des Erdgravitationsfeldes am größten sind.

Der auf den Ursprung des (geozentrischen) Bezugssystems bezogene Ortsvektor \mathbf{r} wird nun als Summe aus dem topozentrischen Beobachtungsvektor \mathbf{R} und dem Stati-

onsvektor \mathbf{R}_S im Sinne der geometrischen Grundgleichung der Satellitengeodäsie (Abb. 1.1) dargestellt,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_S . \quad (1.11)$$

Nach zweimaliger Zeitableitung erhält man zunächst,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{R}}_S , \quad (1.12)$$

und nach Umstellung schließlich die Bewegungsgleichung des Satelliten, beschrieben als Zeitfunktion des topozentrischen Ortsvektors. Diese Bewegungsgleichung stellt die Grundlage des mathematischen Modells zur Bestimmung der Gravitationsfeldparameter in der Funktion $\mathbf{a}_R(t)$ und der Stationskoordinaten \mathbf{R}_S dar:

$$\ddot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{a}_K(t) + \mathbf{a}_R(t) - \ddot{\mathbf{R}}_S(t) + \mathbf{a}_{St}(t) . \quad (1.13)$$

Tab. 1.3: Größenordnung der auf verschiedene Satelliten in unterschiedlicher Flughöhe wirkenden Beschleunigungen.

Quelle der Beschleunigung	Bezeichnung	Größenordnung der Beschleunigungen (m/s^2)				
		Satellit	STARLETTE	AJISAI	LAGEOS	GPS
		Halbachse (km)	7337	7869	12266	26559
Oberfläche / Masse (m^2/kg)	$9,6 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$		
Kepler-Term	$ \mathbf{a}_K $	7,4	6,4	2,6	0,6	
C_{20}	$ \mathbf{a}_R $	$8 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	
restliches Störpotential		$1 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$	
dritte Körper	$ \mathbf{a}_B $	$1 \cdot 10^{-6}$	$1-2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	
Erdgezeiten	$ \mathbf{a}_E $	$2 \cdot 10^{-7}$	$1-2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-9}$	
Ozeangezeiten	$ \mathbf{a}_O $	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$	
Luftwiderstand	$ \mathbf{a}_D $	$1-2 \cdot 10^{-10}$	$1-2 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-12}$	0	
Strahlungsdruck	$ \mathbf{a}_S $	$5 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$	
Erdalbedo	$ \mathbf{a}_A $	$5 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-9}$	

Die Störbeschleunigungen,

$$\mathbf{a}_{St} := \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_S + \mathbf{a}_A , \quad (1.14)$$

müssen entweder aus hinreichend genauen Modellen entnommen oder gegebenenfalls mitbestimmt werden.

Da i.a. keine topozentrischen Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{R}}(t)$ der Satellitenbewegung beobachtet werden, sondern gewisse Funktionale davon, muß zunächst die Satellitenbahn durch Integration unter Festlegung von Integrationskonstanten ($\alpha_1, \dots, \alpha_6$) bestimmt werden. Diese Integrationskonstanten können entweder Anfangswerte (Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zu einem gewissen Zeitpunkt) oder Randwerte (zwei Ortsvektoren zu zwei Zeitpunkten) sein und müssen im Zuge der Parameterbestimmung mitbestimmt werden. Da die Gleichung (1.13) in den zu bestimmenden Parametern nichtlinear ist, müssen schließlich Näherungen für die zu bestimmenden Parameter eingeführt werden. Die Bestimmung von Zuschlägen zu den Näherungswerten wird durch eine differentielle Bahnbestimmung gewonnen. Voraussetzung ist die Lösung der Bewegungsgleichung bei bekannten rechten Seiten der Bewegungsgleichung (1.13). Hierzu gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: eine numerische und eine analytische.

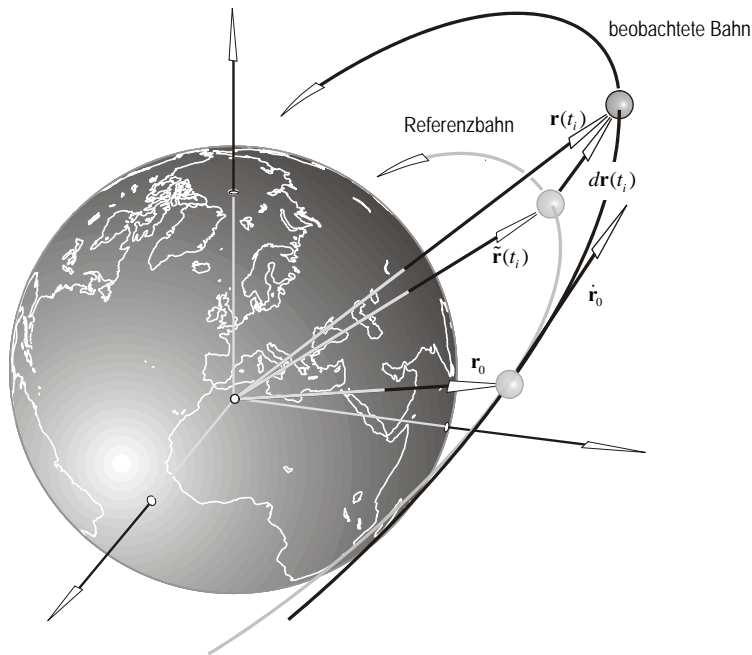


Abb. 1.2: Prinzip der differentiellen Bahnbestimmung.

Die **numerischen Verfahren** können, ausgehend von gewissen Determinierungsgrößen, nur spezielle Lösungen für die einzelnen Bahnbögen liefern. Die Verfahren bestehen i.a. in der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen bei Vorgabe eines Referenzfeldes. Beobachtete Bahndaten werden den Referenzdaten gegenübergestellt und Zuschläge zu den Referenzdaten im Sinne einer differentiellen Bahnbestimmung durch eine Ausgleichung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt (Abb. 1.2). Die Entwicklung elektronischer Rechner und die Konstruktion darauf abgestimmter Integrationsverfahren hat diese Möglichkeit zu einem aus der Himmelsmechanik und Satellitengeodäsie nicht mehr wegzudenkenden Instrument gemacht. Heute werden diese Verfahren in erster Linie verwendet.

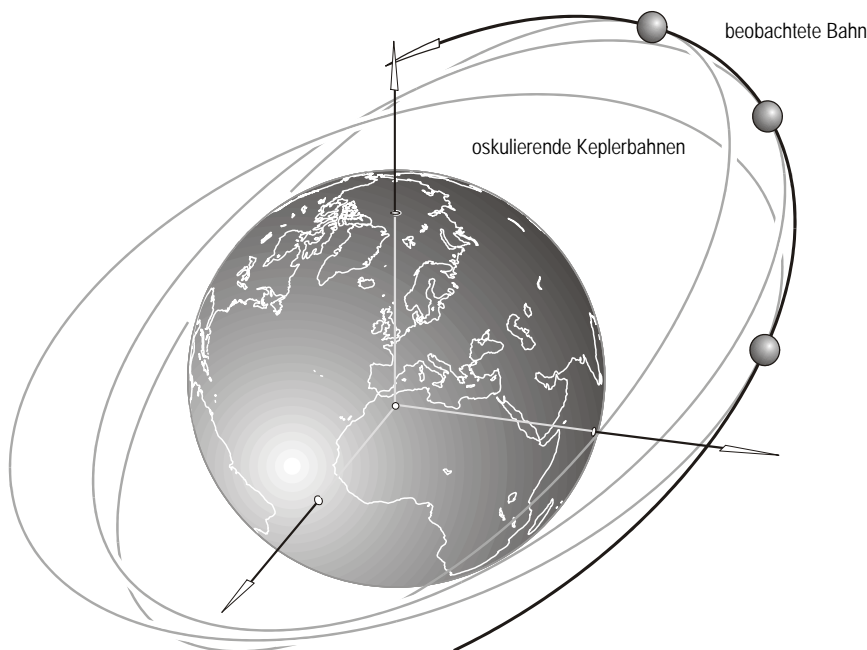


Abb. 1.3: Oskulierende Keplerbahnen der beobachteten Bahnen.

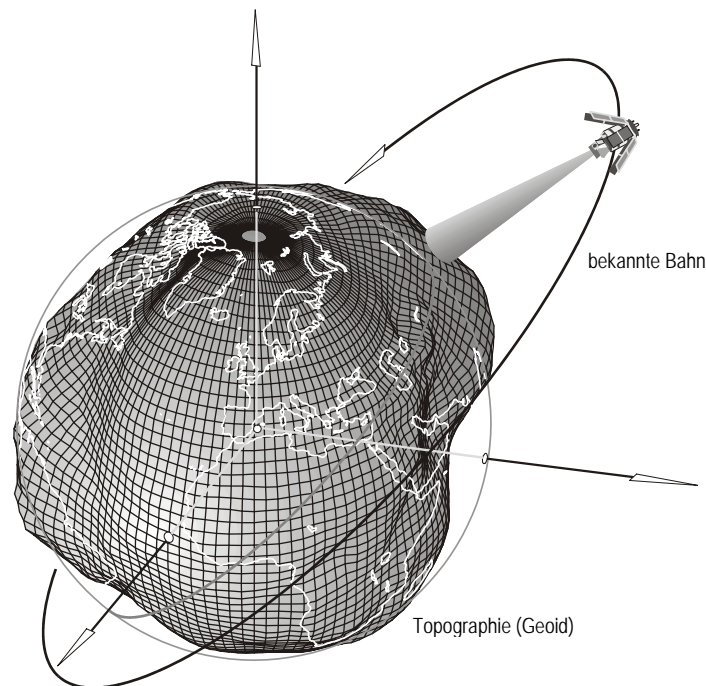
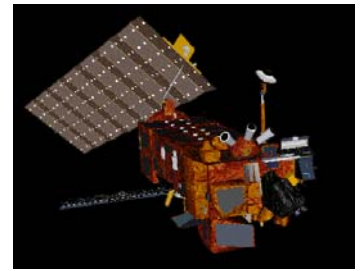
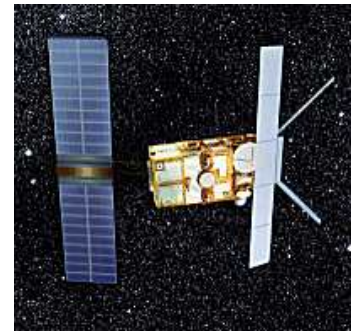


Abb. 1.4: Prinzip der Radaraltimetrie.



Erderkundungssatellit ENVISAT



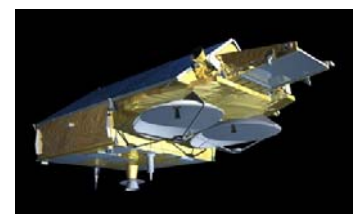
Erderkundungssatellit ERS1/2

Die *analytischen Verfahren* liefern eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in Form eines mathematischen Ausdrucks, in dem Zeit und Integrationskonstanten sowie Feld- und Wechselwirkungsparameter beliebig wählbar sind. Explizite Lösungen der in der Himmelsmechanik auftretenden Differentialgleichungen sind jedoch nur in Sonderfällen möglich. Das Ein- und das Zweikörperproblem sind solche Beispiele. Schon für das Dreikörperproblem findet man keine explizite Lösung mehr. In einigen Sonderfällen kann man eine analytische Lösung näherungsweise als Reihenentwicklung erhalten. Ein häufig beschrittener Weg ist die Integration von Störungsgleichungen, wobei man von der analytischen Lösung eines vereinfachten Bewegungsproblems, i.a. des Keplerproblems, ausgeht. Bei geschickter Wahl der Feldparameter, beispielsweise die Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials, können in diesem Fall gewissen Bahnstörungen, d.h. den Veränderungen der Keplerelemente, einzelnen Feldparametern zugeordnet werden

1.1.3 Satelliten als Träger von Sensoren

Künstliche Erdsatelliten können auch als Träger von Sensoren verschiedenster Art verwendet werden. Diese Sensoren können durch In-Situ-Messungen beispielsweise sowohl das Gravitationsfeld aber auch andere im Bereich des Satelliten wirkende Kraftfelder direkt ausmessen. Andere Funktionen ergeben sich dadurch, daß der Satellit mit Sendern, Transpondern, Reflektoren, Empfängern oder Speichern ausgestattet wird. Nach dem Puls-Echo-Verfahren (Radarprinzip) können beispielsweise vom Satelliten aus Bodenpunkte angemessen werden und damit die Oberfläche (Topographie) von Kontinenten, Ozeanen und Eisflächen erfaßt werden (Abb. 1.4). Diese Radaraltimetrie ist von großem geodätischen Interesse über den Ozeanen, da die Meerestopographie genähert mit einer Äquipotentialfläche des Schwerefeldes (dem Geoid) identifiziert werden kann.

Zur hochauflösenden Gravitationsfeldbestimmung kann man auch zwei Testkörper vorsehen, deren Relativbewegung gemessen wird. Dies kann dadurch geschehen, daß relative Kräfte oder Drehmomente im Satellitenbereich dynamisch gemessen werden (Satellitengravitationsgradiometrie) oder die Relativbewegung nach dem Dopplerprinzip oder auf interferometrischem Wege kinematisch ausgemessen wird (Satellite-to-Satellite-



Erderkundungssatellit CRYOSAT

Tracking). Zu einer Formulierung des mathematischen Modells gelangt man, wenn die Bewegungsgleichung der einen Testmasse m_2 bezüglich einer Testmasse m_1 bei Gravitationswechselwirkung mit dem Gezeiten erzeugenden dritten Körper, die Erde m_\oplus , formuliert wird:

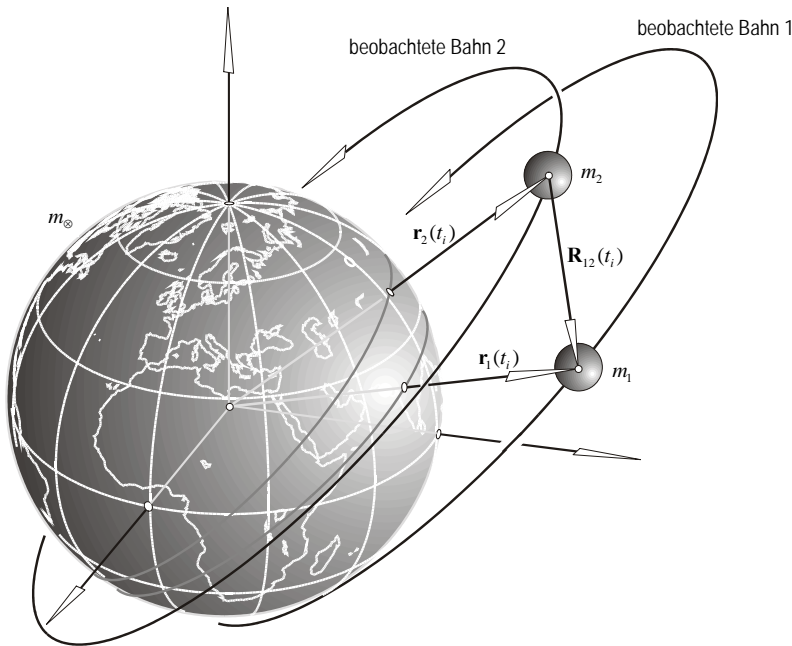
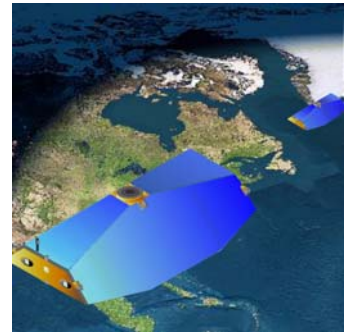


Abb. 1.5: Prinzip des Satellite-to-Satellite-Trackings.



Satellite-to-satellite Tracking Mission GRACE (low-low-Anordnung)

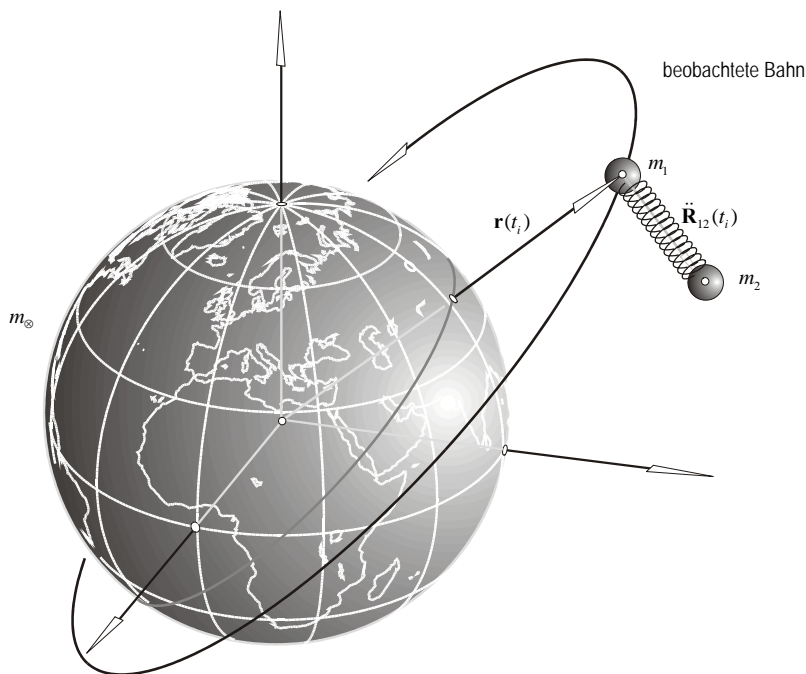
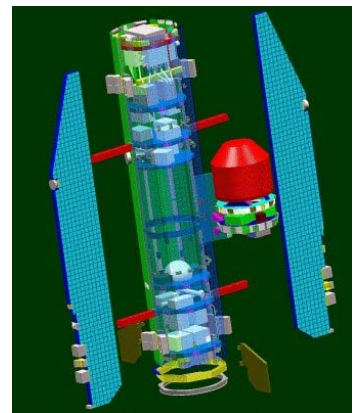
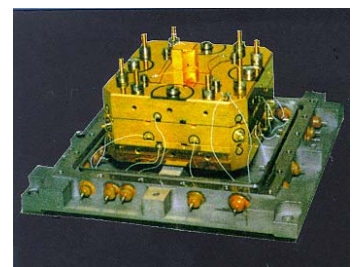


Abb. 1.6: Prinzip der Satellitengravitationsgradiometrie.



Satelliten-Gravitations-Gradiometrie-Satellit GOCE



Industriemodell eines Gravitationsgradiometers

$$\mu_{12} \ddot{\mathbf{R}}_{12} = \mathbf{K}_{21} + \mathbf{G}_{(21)\oplus}, \quad (1.15)$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (1.16)$$

dem Ortsvektor der Testmasse m_1 bezogen auf den Körper m_2

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (1.17)$$

der Gezeitenwechselwirkung der beiden Testmassen

$$\mathbf{G}_{(21)\otimes} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{K}_{2\otimes} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{K}_{1\otimes} \quad (1.18)$$

und der Gravitationswechselwirkung \mathbf{K}_{21} der beiden Testmassen m_1 und m_2 . Da diese Kraft \mathbf{K}_{21} , verglichen mit der Gezeitenkraft der Erde $\mathbf{G}_{(21)\otimes}$, i.a. vernachlässigbar ist, wird die Gravitationsfeldbestimmung im Unterschied zur Formel (1.5) auf die direkte Ausmessung der Gezeitenkraft der Erde zurückgeführt. Während die Gezeitenkraft nach Formel (1.18) für Testmassen gilt, die beliebigen Abstand voneinander besitzen, kann im Falle sehr nahe beieinander liegenden Testmassen die Gezeitenkraft durch den Gravitationstensor ausgedrückt werden:

$$\mathbf{G}_{(21)\otimes} = \mu_{12} \mathbf{R}_{12} \cdot \nabla \mathbf{g}_{\otimes} \quad (1.19)$$

mit der Gravitationsfeldstärke \mathbf{g}_{\otimes} der Erde im Bereich der beiden Testmassen.

Das grundlegende mathematische Modell für Beobachtungen des Typs Satellite-to-Satellite-Tracking lautet unter Beachtung von $\mathbf{K}_{i\otimes} = m_i \mathbf{g}_{\otimes}(\mathbf{R}_i, t)$ somit

$$\ddot{\mathbf{R}}_{12}(t) = \mathbf{g}_{\otimes}(\mathbf{R}_2, t) - \mathbf{g}_{\otimes}(\mathbf{R}_1, t), \quad (1.20)$$

während für die Satellitengravitationsgradiometrie beispielsweise die vereinfachte Version

$$\ddot{\mathbf{R}}_{12}(t) = \mathbf{R}_{12}(t) \cdot \nabla \mathbf{g}_{\otimes}(\mathbf{R}_1, t) \quad (1.21)$$

angesetzt werden kann. Eine entsprechende Beziehung kann für den Fall formuliert werden, daß das Gezeitenfeld der Erde auf die beiden Testmassen als Drehmoment wirkt.

1.2 Gravitationsfeld und Gezeitenfeld

Die Bewegungsgleichung zur Beschreibung der relativen Bewegung zweier gravitierender Körper unter dem gravitativen Einfluß weiterer Körper enthält die

- Kräftefunktion \mathbf{K}_{21} , die die gravitative Wechselwirkung der beiden Teilchen m_1 und m_2 beschreibt. Sie kann beispielsweise in Felddarstellung durch das Gravitationsfeld des Referenzteilchens m_1 mit der Gravitationsfeldstärke $\mathbf{g}_1(\mathbf{R})$ dargestellt werden

$$\mathbf{K}_{21} = m_2 \mathbf{g}_1(\mathbf{R}_2). \quad (1.22)$$

sowie die

- Gezeitenkraft $\mathbf{G}_{(21)3}$, die den Gravitationseffekt eines „dritten“ Körpers m_3 beschreibt. Sie ergibt sich als Differenz der gravitativen Wechselwirkungskräfte des Körpers m_3 mit den Teilchen m_1 und m_2 ,

$$\mathbf{G}_{(21)3} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{K}_{23} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{K}_{13}. \quad (1.23)$$

Die Terme \mathbf{K}_{23} und \mathbf{K}_{13} können wiederum durch das Gravitationsfeld des „dritten“ Körpers m_3 mit der Gravitationsfeldstärke $\mathbf{g}_3(\mathbf{R})$,

$$\mathbf{K}_{23} = m_2 \mathbf{g}_3(\mathbf{R}_2) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K}_{13} = m_1 \mathbf{g}_3(\mathbf{R}_1), \quad (1.24)$$

dargestellt werden, so daß die Gezeitenkraft auch in der Form

$$\mathbf{G}_{(21)3} = \mu_{12} (\mathbf{g}_3(\mathbf{R}_2) - \mathbf{g}_3(\mathbf{R}_1)) \quad (1.25)$$

geschrieben werden kann.

Beispiel: Für die Gezeitenkraft des Mondes (Masse m_ζ , Abstand Erde-Mond R_ζ), die auf ein mondnahe bzw. mondferne Teilchen (Masse m_2) der Erdoberfläche (Erdradius R) wirkt, ergibt sich (Gravitationskonstante G)

$$\mathbf{G}_{(2\otimes)\zeta} = \mu_{\otimes 2} (\mathbf{g}_\zeta(\mathbf{R}_2) - \mathbf{g}_\zeta(\mathbf{R}_\otimes)) \approx \pm 2Gm_2m_\zeta \frac{R}{R_\zeta^3} \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.26)$$

Das positive Vorzeichen gilt für die mondnahe, das negative für die mondferne Position. Der Einheitsvektor \mathbf{e}_ζ weist von der Erde zum Mond.

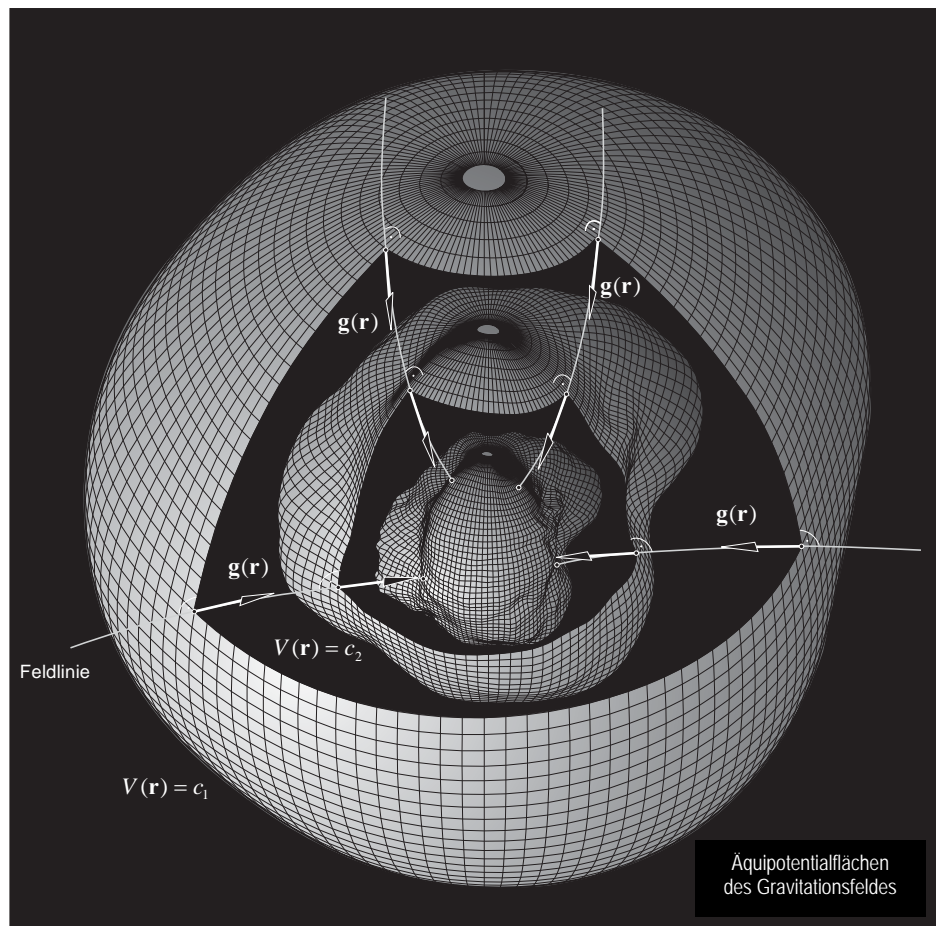


Abb. 1.7: Darstellung des Gravitationsfeldes durch Äquipotentialflächen, Feldlinien und Feldstärkevektoren.

Gravitationsfelder können einerseits durch die Gravitationsfeldstärkevektoren beschrieben bzw. veranschaulicht werden, oder als konservatives Feld durch die Äquipotentialflächen einer Skalarfunktion, dem Gravitationspotential $V(\mathbf{R})$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} V(\mathbf{R}). \quad (1.27)$$

Auch die Gezeitenkraft kann in Felddarstellung durch das Gezeitenfeld des Körpers l im Referenzpunkt $1 \equiv i$ angeschrieben werden. Der Feldpunkt des Teilchens $2 \equiv k$ wird dabei als Ortsvektor \mathbf{R}_{ik} beschrieben. Der Referenzpunkt wird dabei mit dem Index i , der Aufpunkt mit dem Index k versehen.

$$\mathbf{G}_{(ki)3} = \mu_{ik} \mathbf{g}_{(i)l}(\mathbf{R}_{ik}) \tag{1.28}$$

Gezeitenfelder können einerseits durch die Gezeitenfeldstärkevektoren dargestellt werden, oder durch die Äquipotentialflächen einer Skalarfunktion, dem Gezeitenpotential $V_{(i)l}(\mathbf{R}_{ik})$:

$$\mathbf{g}_{(i)l}(\mathbf{R}_{ik}) = \nabla_{\mathbf{R}_{ik}} V_{(i)l}(\mathbf{R}_{ik}) \tag{1.29}$$

In der unmittelbaren Umgebung des Referenzpunktes i kann das Gezeitenpotential durch den Gravitationsgradienten des gezeiterzeugenden Körpers l beschrieben werden:

$$V_{(i)l}(\mathbf{R}_{ik}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{ik} \cdot \nabla \mathbf{g}_l(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{R}_{ik} \tag{1.30}$$

womit sich die Gezeitenkraft auf folgende Weise ergibt:

$$\mathbf{G}_{(ki)l} = \mu_{ik} \nabla_{\mathbf{R}_{ik}} V_{(i)l} = \mu_{ik} \nabla \mathbf{g}_l(\mathbf{R}_i) \cdot \mathbf{R}_{ik} \tag{1.31}$$

Die Abb. 1.9 macht deutlich, dass das Gezeitenfeld in jedem Aufpunkt des Gravitationsfeldes eines gezeiterzeugenden Körpers definiert ist; das obere Bild zeigt die Feldlinien, das untere die Äquipotentialflächen der Gezeitenfelder in den Aufpunkten.

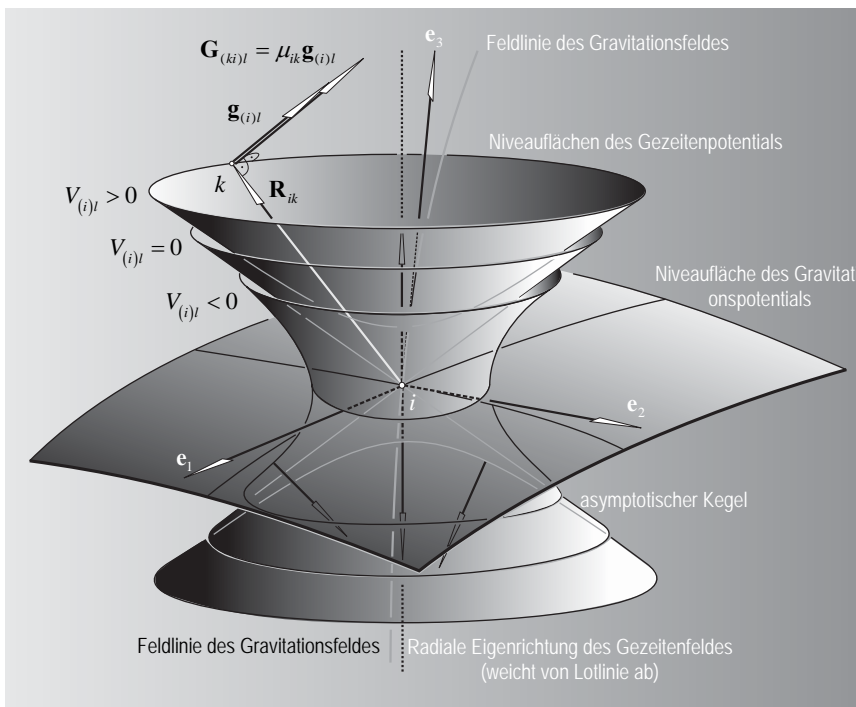


Abb. 1.8: Darstellung des Gezeitenfeldes durch die Äquipotentialflächen des Gezeitenpotentials (der gezeiterzeugende Körper ist durch den Index l gekennzeichnet); im Vergleich dazu die Äquipotentialfläche des Gravitationsfeldes im Topozentrum.

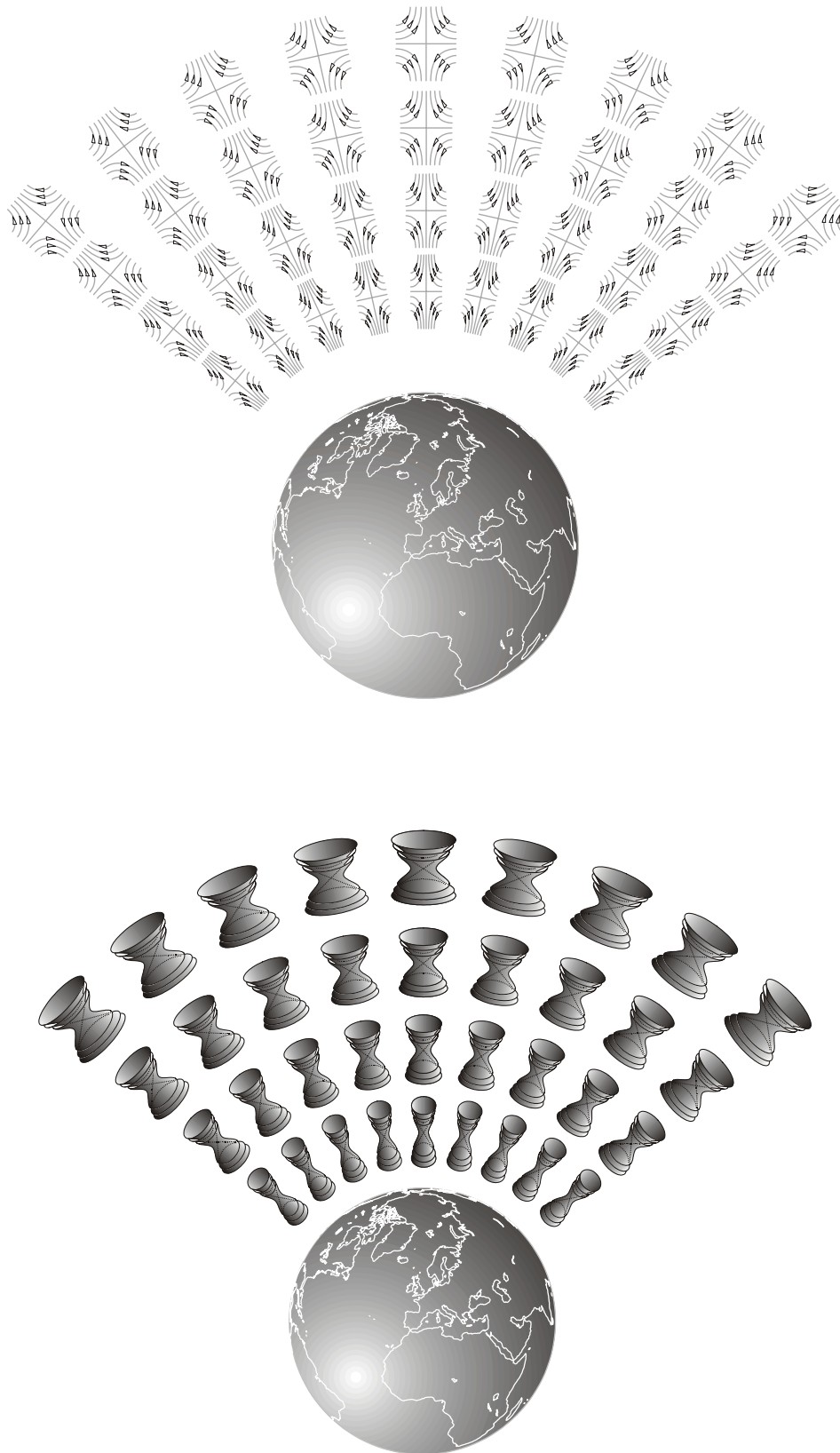


Abb. 1.9: Darstellungen des Gezeitenfeldes der Erde in Punkten des Außenraumes.